Grothendieck et la théorie de Galois

Tamás Szamuely

Institut Rényi, Budapest

25 octobre 2011
Colloque Galois, Institut Henri Poincaré, Paris

Contributions principales

Contributions principales de Grothendieck à la théorie de Galois :

Contributions principales

Contributions principales de Grothendieck à la théorie de Galois :

- Introduction du point de vue fonctoriel ;

Contributions principales

Contributions principales de Grothendieck à la théorie de Galois :

- Introduction du point de vue fonctoriel ;
- Le formalisme des catégories tannakiennes et ses applications ;

Contributions principales

Contributions principales de Grothendieck à la théorie de Galois :

- Introduction du point de vue fonctoriel ;
- Le formalisme des catégories tannakiennes et ses applications ;
- Etude du π_1 des schémas, dessins d'enfants, philosophie anabélienne...

La théorie de Galois, façon Grothendieck

Soient k un corps, k_s une clôture séparable de k,
$G := \mathrm{Gal}(k_s|k)$.
C'est un groupe profini muni de la topologie de Krull.

La théorie de Galois, façon Grothendieck

Soient k un corps, k_s une clôture séparable de k,
$G := \mathrm{Gal}(k_s|k)$.
C'est un groupe profini muni de la topologie de Krull.
Le groupe G agit sur k_s, donc sur $\mathrm{Hom}_k(L, k_s)$ pour tout $L|k$ (morphismes de k-algèbres).

Soient k un corps, k_s une clôture séparable de k,
$G := \mathrm{Gal}(k_s|k)$.
C'est un groupe profini muni de la topologie de Krull.
Le groupe G agit sur k_s, donc sur $\mathrm{Hom}_k(L, k_s)$ pour tout $L|k$ (morphismes de k-algèbres).
Si $L = k(\alpha)$ est fini séparable, $\mathrm{Hom}_k(L, k_s)$ est fini.

La théorie de Galois, façon Grothendieck

Soient k un corps, k_s une clôture séparable de k,
$G := \mathrm{Gal}(k_s|k)$.
C'est un groupe profini muni de la topologie de Krull.
Le groupe G agit sur k_s, donc sur $\mathrm{Hom}_k(L, k_s)$ pour tout $L|k$ (morphismes de k-algèbres).
Si $L = k(\alpha)$ est fini séparable, $\mathrm{Hom}_k(L, k_s)$ est fini.

Si f est le polynôme minimal de α,

$$\{k\text{-morphismes } L \to k_s\} \leftrightarrow \{\text{racines de } f \text{ dans } k_s\}$$

La théorie de Galois, façon Grothendieck

Soient k un corps, k_s une clôture séparable de k,
$G := \mathrm{Gal}(k_s|k)$.
C'est un groupe profini muni de la topologie de Krull.
Le groupe G agit sur k_s, donc sur $\mathrm{Hom}_k(L, k_s)$ pour tout $L|k$ (morphismes de k-algèbres).
Si $L = k(\alpha)$ est fini séparable, $\mathrm{Hom}_k(L, k_s)$ est fini.

Si f est le polynôme minimal de α,

$$\{k\text{-morphismes } L \to k_s\} \leftrightarrow \{\text{racines de } f \text{ dans } k_s\}$$

L'action de G sur $\mathrm{Hom}_k(L, k_s)$ correspond donc à une action sur les racines de f (tout comme chez Galois).

Soient k un corps, k_s une clôture séparable de k,
$G := \mathrm{Gal}(k_s|k)$.
C'est un groupe profini muni de la topologie de Krull.
Le groupe G agit sur k_s, donc sur $\mathrm{Hom}_k(L, k_s)$ pour tout $L|k$ (morphismes de k-algèbres).
Si $L = k(\alpha)$ est fini séparable, $\mathrm{Hom}_k(L, k_s)$ est fini.

Si f est le polynôme minimal de α,

$$\{k\text{-morphismes } L \to k_s\} \leftrightarrow \{\text{racines de } f \text{ dans } k_s\}$$

L'action de G sur $\mathrm{Hom}_k(L, k_s)$ correspond donc à une action sur les racines de f (tout comme chez Galois).

Munissons $\mathrm{Hom}_k(L, k_s)$ de la topologie discrète.
L'action de G est continue et transitive.

La théorie de Galois, façon Grothendieck

Théorème

Le foncteur contravariant

$$L \to \mathrm{Hom}_k(L, k_s)$$

induit une anti-équivalence de catégories :

$$\{\text{extensions finies séparables } L|k\} \leftrightarrow$$
$$\{\text{ensembles finis + action continue transitive de } G\ \}$$

[Foncteur en sens inverse :
G-ensemble fini continu $\mapsto$ sous-corps de k_s invariant par le stabilisateur d'un point]

On peut se débarrasser de l'hypothèse de transitivité :

On peut se débarrasser de l'hypothèse de transitivité :

Une *k-algèbre finie étale* est un produit direct fini d'extensions séparables de k.

La théorie de Galois, façon Grothendieck

On peut se débarrasser de l'hypothèse de transitivité :

Une *k-algèbre finie étale* est un produit direct fini d'extensions séparables de k.

Théorème

Le foncteur contravariant

$$A \to \mathrm{Hom}_k(A, k_s)$$

induit une anti-équivalence de catégories :

$$\{k\text{-algèbres finies étales}\} \leftrightarrow \{G\text{-ensembles finis continus}\}$$

La théorie de Galois, façon Grothendieck

On peut se débarrasser de l'hypothèse de transitivité :

Une *k-algèbre finie étale* est un produit direct fini d'extensions séparables de k.

Théorème

Le foncteur contravariant

$$A \to \mathrm{Hom}_k(A, k_s)$$

induit une anti-équivalence de catégories :

$$\{k\text{-algèbres finies étales}\} \leftrightarrow \{G\text{-ensembles finis continus}\}$$

Note : Le foncteur induisant l'équivalence dépend du choix de k_s. Ici k_s (plus exactement, le foncteur $\mathrm{Hom}_k(\quad, k_s)$) joue le rôle d'un 'point base'.

Le π_1 topologique, façon Grothendieck

X= espace connexe et localement simplement connexe
$Y \to X$: revêtement de X

Le π_1 topologique, façon Grothendieck

X= espace connexe et localement simplement connexe
$Y \to X$: revêtement de X
Etant donné $x \in X$, posons
$\mathrm{Fib}_x(Y) :=$ fibre de Y au-dessus de x.
Cet ensemble est muni d'une action du groupe fondamental $\pi_1(X, x)$ (par « relèvement des chemins et des homotopies »).

Le π_1 topologique, façon Grothendieck

$X=$ espace connexe et localement simplement connexe
$Y \to X$: revêtement de X
Etant donné $x \in X$, posons
$\mathrm{Fib}_x(Y) :=$ fibre de Y au-dessus de x.
Cet ensemble est muni d'une action du groupe fondamental $\pi_1(X,x)$ (par « relèvement des chemins et des homotopies »).

Théorème

Le foncteur

$$Y \to \mathrm{Fib}_x(Y)$$

induit une équivalence de catégories :

$$\{\text{revêtements de } X\} \leftrightarrow \{\pi_1(X,x)\text{-ensembles }\}$$

Ici, encore, le foncteur Fib_x dépend du choix du point base x.

Le π_1 topologique, façon Grothendieck

En fait, le foncteur Fib_x est *représentable* par un revêtement $\pi : \widetilde{X}_x \to X$, i.e. il existe un isomorphisme de foncteurs

$$\mathrm{Fib}_x \cong \mathrm{Hom}(\widetilde{X}_x, \ \ ).$$

En fait, le foncteur Fib_x est *représentable* par un revêtement $\pi : \widetilde{X}_x \to X$, i.e. il existe un isomorphisme de foncteurs

$$\mathrm{Fib}_x \cong \mathrm{Hom}(\widetilde{X}_x, \ \ ).$$

De plus,

$$\mathrm{Aut}\,(\widetilde{X}_x | X) \cong \pi_1(X, x).$$

Le π_1 topologique, façon Grothendieck

En fait, le foncteur Fib_x est *représentable* par un revêtement $\pi : \widetilde{X}_x \to X$, i.e. il existe un isomorphisme de foncteurs

$$\mathrm{Fib}_x \cong \mathrm{Hom}(\widetilde{X}_x, \ \ ).$$

De plus,

$$\mathrm{Aut}\,(\widetilde{X}_x|X) \cong \pi_1(X, x).$$

Par conséquent,

$$\pi_1(X, x) \cong \mathrm{Aut}\,(\mathrm{Fib}_x),$$

ce qui donne une définition de $\pi_1(X, x)$ comme le groupe d'automorphismes d'un *foncteur.*

Le π_1 topologique, façon Grothendieck

En fait, le foncteur Fib_x est *représentable* par un revêtement $\pi : \widetilde{X}_x \to X$, i.e. il existe un isomorphisme de foncteurs

$$\mathrm{Fib}_x \cong \mathrm{Hom}(\widetilde{X}_x, \ \ ).$$

De plus,

$$\mathrm{Aut}\,(\widetilde{X}_x|X) \cong \pi_1(X, x).$$

Par conséquent,

$$\pi_1(X, x) \cong \mathrm{Aut}\,(\mathrm{Fib}_x),$$

ce qui donne une définition de $\pi_1(X, x)$ comme le groupe d'automorphismes d'un *foncteur.*
De même, on peut identifier l'espace des chemins entre $x, y \in X$ à l'ensemble des isomorphismes de foncteurs $\mathrm{Fib}_x \xrightarrow{\sim} \mathrm{Fib}_y$.

Le π_1 topologique, façon Grothendieck

Soit $\Pi_x :=$ complété profini de $\pi_1(X, x)$.

Le π_1 topologique, façon Grothendieck

Soit $\Pi_x :=$ complété profini de $\pi_1(X, x)$.

Corollaire

Il y a une équivalence de catégories

$$\{\text{revêtements } \textit{finis} \text{ de } X\ \} \leftrightarrow$$
$$\{\text{ensembles finis avec } \Pi_x\text{-action continue}\}$$

Le π_1 topologique, façon Grothendieck

Soit $\Pi_x :=$ complété profini de $\pi_1(X, x)$.

Corollaire

Il y a une équivalence de catégories

$$\{\text{revêtements } \textit{finis} \text{ de } X\ \} \leftrightarrow$$
$$\{\text{ensembles finis avec } \Pi_x\text{-action continue}\}$$

Note : Le corollaire vaut pour X connexe quelconque.

Le π_1 algébrique, façon Grothendieck

Analogue des revêtements finis en géométrie algébrique : morphismes finis étales surjectifs $Y \to X$.

Le π_1 algébrique, façon Grothendieck

Analogue des revêtements finis en géométrie algébrique : morphismes finis étales surjectifs $Y \to X$.
Pour un schéma connexe X tout point base géométrique $\bar{x} : \mathrm{Spec}(\Omega) \to X$ induit un foncteur fibre

$$Y \to \mathrm{Fib}_{\bar{x}}(Y) := Y \times_X \mathrm{Spec}(\Omega).$$

Le π_1 algébrique, façon Grothendieck

Analogue des revêtements finis en géométrie algébrique : morphismes finis étales surjectifs $Y \to X$.
Pour un schéma connexe X tout point base géométrique $\bar{x} : \mathrm{Spec}(\Omega) \to X$ induit un foncteur fibre

$$Y \to \mathrm{Fib}_{\bar{x}}(Y) := Y \times_X \mathrm{Spec}(\Omega).$$

Grothendieck a *défini* $\pi_1(X, \bar{x})$ comme le groupe d'automorphismes de ce foncteur.

Le π_1 algébrique, façon Grothendieck

Analogue des revêtements finis en géométrie algébrique : morphismes finis étales surjectifs $Y \to X$.
Pour un schéma connexe X tout point base géométrique $\bar{x} : \mathrm{Spec}(\Omega) \to X$ induit un foncteur fibre

$$Y \to \mathrm{Fib}_{\bar{x}}(Y) := Y \times_X \mathrm{Spec}(\Omega).$$

Grothendieck a *défini* $\pi_1(X, \bar{x})$ comme le groupe d'automorphismes de ce foncteur.
Il a montré : c'est un groupe profini dont l'action sur $\mathrm{Fib}_{\bar{x}}$ est continue.
De plus, $\mathrm{Fib}_{\bar{x}}$ induit une équivalence de catégories

$$\{Y \to X \,\text{fini étale}\} \leftrightarrow \{\text{ensembles finis} + \text{action continue de}\,\pi_1(X, \bar{x})\}.$$

Le π_1 algébrique, façon Grothendieck

Analogue des revêtements finis en géométrie algébrique : morphismes finis étales surjectifs $Y \to X$.
Pour un schéma connexe X tout point base géométrique $\bar{x} : \mathrm{Spec}(\Omega) \to X$ induit un foncteur fibre

$$Y \to \mathrm{Fib}_{\bar{x}}(Y) := Y \times_X \mathrm{Spec}(\Omega).$$

Grothendieck a *défini* $\pi_1(X, \bar{x})$ comme le groupe d'automorphismes de ce foncteur.
Il a montré : c'est un groupe profini dont l'action sur $\mathrm{Fib}_{\bar{x}}$ est continue.
De plus, $\mathrm{Fib}_{\bar{x}}$ induit une équivalence de catégories

$$\{Y \to X \,\text{fini étale}\} \leftrightarrow \{\text{ensembles finis} + \text{action continue de}\, \pi_1(X, \bar{x})\}.$$

Ici $\mathrm{Fib}_{\bar{x}}$ est pro-représentable, i.e. $\mathrm{Fib}_{\bar{x}} \cong \varinjlim \mathrm{Hom}(P_\alpha, X)$ pour un système projectif (P_α) de revêtements étales (galoisiens) de X.

La suite exacte d'homotopie

- Pour X= point défini sur k, on a $\pi_1(X,\bar{x}) = \mathrm{Gal}(k_s|k)$.

La suite exacte d'homotopie

- Pour X= point défini sur k, on a $\pi_1(X, \bar{x}) = \mathrm{Gal}(k_s|k)$.
- Pour X = variété sur $\mathbf{C}$,

$$\pi_1(X, \bar{x}) = \text{complété profini de } \pi_1^{\mathrm{top}}(X, \bar{x}).$$

La suite exacte d'homotopie

- Pour X= point défini sur k, on a $\pi_1(X,\bar{x}) = \mathrm{Gal}(k_s|k)$.
- Pour X = variété sur $\mathbf{C}$,

$$\pi_1(X,\bar{x}) = \text{complété profini de } \pi_1^{\mathrm{top}}(X,\bar{x}).$$

De plus, si X = variété géométriquement connexe sur le corps k,
$\overline{k} \supset k_s$ = clôtures algébrique (resp. séparable) de k,
$\overline{X} := X \times_{\mathrm{Spec}\,(k)} \mathrm{Spec}\,(k_s)$,
$\bar{x} : \mathrm{Spec}\,(\overline{k}) \to X$ un point géométrique de X,

La suite exacte d'homotopie

- Pour X= point défini sur k, on a $\pi_1(X, \bar{x}) = \mathrm{Gal}(k_s|k)$.
- Pour X = variété sur $\mathbf{C}$,

$$\pi_1(X, \bar{x}) = \text{complété profini de } \pi_1^{\mathrm{top}}(X, \bar{x}).$$

De plus, si X = variété géométriquement connexe sur le corps k,
$\overline{k} \supset k_s$ = clôtures algébrique (resp. séparable) de k,
$\overline{X} := X \times_{\mathrm{Spec}\,(k)} \mathrm{Spec}\,(k_s)$,
$\bar{x} : \mathrm{Spec}\,(\overline{k}) \to X$ un point géométrique de X,
alors on a une suite exacte

$$1 \to \pi_1(\overline{X}, \bar{x}) \to \pi_1(X, \bar{x}) \to \mathrm{Gal}(k_s|k) \to 1$$

dont les flèches sont induites par la fonctorialité du π_1.

La suite exacte d'homotopie

- Pour X= point défini sur k, on a $\pi_1(X,\bar{x}) = \mathrm{Gal}(k_s|k)$.
- Pour X = variété sur $\mathbf{C}$,

$$\pi_1(X,\bar{x}) = \text{complété profini de } \pi_1^{\mathrm{top}}(X,\bar{x}).$$

De plus, si X = variété géométriquement connexe sur le corps k,
$\overline{k} \supset k_s$ = clôtures algébrique (resp. séparable) de k,
$\overline{X} := X \times_{\mathrm{Spec}\,(k)} \mathrm{Spec}\,(k_s)$,
$\bar{x} : \mathrm{Spec}\,(\overline{k}) \to X$ un point géométrique de X,
alors on a une suite exacte

$$1 \to \pi_1(\overline{X},\bar{x}) \to \pi_1(X,\bar{x}) \to \mathrm{Gal}(k_s|k) \to 1$$

dont les flèches sont induites par la fonctorialité du π_1.
Si de plus k est de caractéristique 0, alors $\pi_1(\overline{X},\bar{x})$ ne change pas par extension de corps algébriquement clos, donc $\pi_1(X,\bar{x})$ est extension de $\mathrm{Gal}(k_s|k)$ par un groupe provenant de la topologie.

La représentation galoisienne extérieure

Le groupe $\pi_1(X, \bar{x})$ agit sur le sous-groupe normal $\pi_1(\overline{X}, \bar{x})$ par automorphismes intérieurs, d'où une flèche

$$\phi_X : \pi_1(X, \bar{x}) \to \mathrm{Aut}\,(\pi_1(\overline{X}, \bar{x})).$$

La représentation galoisienne extérieure

Le groupe $\pi_1(X, \bar{x})$ agit sur le sous-groupe normal $\pi_1(\overline{X}, \bar{x})$ par automorphismes intérieurs, d'où une flèche

$$\phi_X : \pi_1(X, \bar{x}) \to \mathrm{Aut}\,(\pi_1(\overline{X}, \bar{x})).$$

Elle envoie $\pi_1(\overline{X}, \bar{x}))$ dans le groupe $\mathrm{Inn}(\pi_1(\overline{X}, \bar{x}))$ des automorphismes intérieurs de $\pi_1(\overline{X}, \bar{x}))$.

La représentation galoisienne extérieure

Le groupe $\pi_1(X, \bar{x})$ agit sur le sous-groupe normal $\pi_1(\overline{X}, \bar{x})$ par automorphismes intérieurs, d'où une flèche

$$\phi_X : \pi_1(X, \bar{x}) \to \mathrm{Aut}\,(\pi_1(\overline{X}, \bar{x})).$$

Elle envoie $\pi_1(\overline{X}, \bar{x}))$ dans le groupe $\mathrm{Inn}(\pi_1(\overline{X}, \bar{x}))$ des automorphismes intérieurs de $\pi_1(\overline{X}, \bar{x}))$.
Par passage au quotient, on obtient

$$\rho_X : \mathrm{Gal}(k_s|k) \to \mathrm{Out}(\pi_1(\overline{X}, \bar{x})) := \mathrm{Aut}\,(\pi_1(\overline{X}, \bar{x}))/\mathrm{Inn}(\pi_1(\overline{X}, \bar{x}))$$

la *représentation galoisienne extérieure*.

La représentation galoisienne extérieure

Le groupe $\pi_1(X, \bar{x})$ agit sur le sous-groupe normal $\pi_1(\overline{X}, \bar{x})$ par automorphismes intérieurs, d'où une flèche

$$\phi_X : \pi_1(X, \bar{x}) \to \mathrm{Aut}\,(\pi_1(\overline{X}, \bar{x})).$$

Elle envoie $\pi_1(\overline{X}, \bar{x}))$ dans le groupe $\mathrm{Inn}(\pi_1(\overline{X}, \bar{x}))$ des automorphismes intérieurs de $\pi_1(\overline{X}, \bar{x}))$.
Par passage au quotient, on obtient

$$\rho_X : \mathrm{Gal}(k_s|k) \to \mathrm{Out}(\pi_1(\overline{X}, \bar{x})) := \mathrm{Aut}\,(\pi_1(\overline{X}, \bar{x}))/\mathrm{Inn}(\pi_1(\overline{X}, \bar{x}))$$

la *représentation galoisienne extérieure*.

Exemple. Si $X = E$ est une courbe elliptique, alors $\pi_1(\overline{E})$ est abélien, de pro-ℓ-quotient maximal isomorphe au module de Tate $T_\ell(\overline{E})$ pour $\ell \neq \mathrm{car}(k)$.

La représentation galoisienne extérieure

Le groupe $\pi_1(X,\bar{x})$ agit sur le sous-groupe normal $\pi_1(\overline{X},\bar{x})$ par automorphismes intérieurs, d'où une flèche

$$\phi_X : \pi_1(X,\bar{x}) \to \mathrm{Aut}\,(\pi_1(\overline{X},\bar{x})).$$

Elle envoie $\pi_1(\overline{X},\bar{x}))$ dans le groupe $\mathrm{Inn}(\pi_1(\overline{X},\bar{x}))$ des automorphismes intérieurs de $\pi_1(\overline{X},\bar{x}))$.
Par passage au quotient, on obtient

$$\rho_X : \mathrm{Gal}(k_s|k) \to \mathrm{Out}(\pi_1(\overline{X},\bar{x})) := \mathrm{Aut}\,(\pi_1(\overline{X},\bar{x}))/\mathrm{Inn}(\pi_1(\overline{X},\bar{x}))$$

la *représentation galoisienne extérieure*.

Exemple. Si $X = E$ est une courbe elliptique, alors $\pi_1(\overline{E})$ est abélien, de pro-ℓ-quotient maximal isomorphe au module de Tate $T_\ell(\overline{E})$ pour $\ell \neq \mathrm{car}(k)$.
Comme $T_\ell(\overline{E}) \cong \mathbf{Z}_\ell^2$, ρ_X induit donc des représentations galoisiennes

$$\mathrm{Gal}(k_s|k) \to \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_\ell)$$

pour tout $\ell \neq \mathrm{car}(k)$.

La représentation galoisienne extérieure

Donc $\rho_X : \mathrm{Gal}(k_s|k) \to \mathrm{Out}(\pi_1(\overline{X}, \bar{x}))$ peut être perçue comme un exemple de généralisation non-commutative des représentations ℓ-adiques usuelles.

La représentation galoisienne extérieure

Donc $\rho_X : \mathrm{Gal}(k_s|k) \to \mathrm{Out}(\pi_1(\overline{X}, \bar{x}))$ peut être perçue comme un exemple de généralisation non-commutative des représentations ℓ-adiques usuelles.

Grothendieck a conjecturé que pour certaines variétés dites « anabéliennes » définies sur des corps de type fini sur le corps premier la représentation ρ_X détermine X à isomorphisme près.

La représentation galoisienne extérieure

Donc $\rho_X : \mathrm{Gal}(k_s|k) \to \mathrm{Out}(\pi_1(\overline{X}, \bar{x}))$ peut être perçue comme un exemple de généralisation non-commutative des représentations ℓ-adiques usuelles.

Grothendieck a conjecturé que pour certaines variétés dites ≪ anabéliennes ≫ définies sur des corps de type fini sur le corps premier la représentation ρ_X détermine X à isomorphisme près.

Pour $X =$ courbe lisse hyperbolique sur un corps global, c'est un théorème (Tamagawa, Mochizuki, Stix).

[La courbe X est hyperbolique $\Leftrightarrow \pi_1(\overline{X}, \bar{x})$ est non-commutatif.]

La représentation galoisienne extérieure

Donc $\rho_X : \mathrm{Gal}(k_s|k) \to \mathrm{Out}(\pi_1(\overline{X}, \bar{x}))$ peut être perçue comme un exemple de généralisation non-commutative des représentations ℓ-adiques usuelles.

Grothendieck a conjecturé que pour certaines variétés dites « anabéliennes » définies sur des corps de type fini sur le corps premier la représentation ρ_X détermine X à isomorphisme près.

Pour $X =$ courbe lisse hyperbolique sur un corps global, c'est un théorème (Tamagawa, Mochizuki, Stix).

[La courbe X est hyperbolique $\Leftrightarrow \pi_1(\overline{X}, \bar{x})$ est non-commutatif.]

Au-dessus d'un corps fini il y a même des énoncés « absolus » avec $\pi_1(X, \overline{x})$ au lieu de $\pi_1(\overline{X}, \bar{x})$ (Tamagawa, Mochizuki).

Linéarisation

Jusqu'ici on n'a considéré que des représentations de permutation.

Linéarisation

Jusqu'ici on n'a considéré que des représentations de permutation. Mais ≪ dans la nature ≫ on trouve plus souvent des représentations linéaires.

Linéarisation

Jusqu'ici on n'a considéré que des représentations de permutation. Mais « dans la nature » on trouve plus souvent des représentations linéaires.

Exemple

Si $X \subset \mathbf{C}$ est un ouvert connexe, $x \in X$, une équation différentielle linéaire d'ordre n

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

définit une représentation de monodromie

$$\rho : \pi_1(X, x) \to \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}).$$

Linéarisation

Jusqu'ici on n'a considéré que des représentations de permutation. Mais ≪ dans la nature ≫ on trouve plus souvent des représentations linéaires.

Exemple

Si $X \subset \mathbf{C}$ est un ouvert connexe, $x \in X$, une équation différentielle linéaire d'ordre n

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

définit une représentation de monodromie

$$\rho : \pi_1(X, x) \to \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}).$$

[Par le théorème d'existence de Cauchy, les solutions locales au voisinage de x forment un **C**-vectoriel de dimension n muni de l'action de monodromie de $\pi_1(X, x)$.]

Linéarisation

Jusqu'ici on a pu récupérer $\pi_1(X, x)$ de ses représentations de permutation comme le groupe d'automorphismes d'un foncteur fibre.

Linéarisation

Jusqu'ici on a pu récupérer $\pi_1(X, x)$ de ses représentations de permutation comme le groupe d'automorphismes d'un foncteur fibre.
Pour les représentations linéaires de dimension finie, on ne recupère que *l'enveloppe algébrique* de $\pi_1(X, x)$; c'est un groupe proalgébrique.

Linéarisation

Jusqu'ici on a pu récupérer $\pi_1(X,x)$ de ses représentations de permutation comme le groupe d'automorphismes d'un foncteur fibre.
Pour les représentations linéaires de dimension finie, on ne recupère que *l'enveloppe algébrique* de $\pi_1(X,x)$; c'est un groupe proalgébrique.

Raison : Soit $\mathrm{Rep}_{\pi_1(X,x)}$ la catégorie de toutes les représentations linéaires complexes de dimension finie de $\pi_1(X,x)$.

Linéarisation

Jusqu'ici on a pu récupérer $\pi_1(X,x)$ de ses représentations de permutation comme le groupe d'automorphismes d'un foncteur fibre.
Pour les représentations linéaires de dimension finie, on ne recupère que *l'enveloppe algébrique* de $\pi_1(X,x)$; c'est un groupe proalgébrique.

Raison : Soit $\mathrm{Rep}_{\pi_1(X,x)}$ la catégorie de toutes les représentations linéaires complexes de dimension finie de $\pi_1(X,x)$.
La plus petite sous-catégorie $\mathcal{C}_\rho$ stable par sous-objets, quotients, facteurs directs, produits tensoriels, duaux contenant $\rho : \pi_1(X,x) \to \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ fixé est la catégorie des représentations de l'adhérence de Zariski $G(\rho)$ de $\mathrm{Im}(\rho)$.

Linéarisation

Jusqu'ici on a pu récupérer $\pi_1(X, x)$ de ses représentations de permutation comme le groupe d'automorphismes d'un foncteur fibre.
Pour les représentations linéaires de dimension finie, on ne recupère que *l'enveloppe algébrique* de $\pi_1(X, x)$; c'est un groupe proalgébrique.

Raison : Soit $\mathrm{Rep}_{\pi_1(X,x)}$ la catégorie de toutes les représentations linéaires complexes de dimension finie de $\pi_1(X, x)$.
La plus petite sous-catégorie $\mathcal{C}_\rho$ stable par sous-objets, quotients, facteurs directs, produits tensoriels, duaux contenant $\rho : \pi_1(X, x) \to \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ fixé est la catégorie des représentations de l'adhérence de Zariski $G(\rho)$ de $\mathrm{Im}(\rho)$. Ensuite, on fait varier ρ.

Linéarisation

Jusqu'ici on a pu récupérer $\pi_1(X,x)$ de ses représentations de permutation comme le groupe d'automorphismes d'un foncteur fibre.
Pour les représentations linéaires de dimension finie, on ne recupère que *l'enveloppe algébrique* de $\pi_1(X,x)$; c'est un groupe proalgébrique.

Raison : Soit $\mathrm{Rep}_{\pi_1(X,x)}$ la catégorie de toutes les représentations linéaires complexes de dimension finie de $\pi_1(X,x)$.
La plus petite sous-catégorie $\mathcal{C}_\rho$ stable par sous-objets, quotients, facteurs directs, produits tensoriels, duaux contenant $\rho : \pi_1(X,x) \to \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ fixé est la catégorie des représentations de l'adhérence de Zariski $G(\rho)$ de $\mathrm{Im}(\rho)$. Ensuite, on fait varier ρ.

Observation : On peut récupérer le groupe algébrique $G(\rho)$ comme le groupe des automorphismes du foncteur d'oubli $\{F : \mathcal{C}_\rho \to \mathbf{C}\text{-vectoriels}\}$ respectant les structures tensorielles.

Linéarisation

Jusqu'ici on a pu récupérer $\pi_1(X,x)$ de ses représentations de permutation comme le groupe d'automorphismes d'un foncteur fibre.
Pour les représentations linéaires de dimension finie, on ne recupère que *l'enveloppe algébrique* de $\pi_1(X,x)$; c'est un groupe proalgébrique.

Raison : Soit $\mathrm{Rep}_{\pi_1(X,x)}$ la catégorie de toutes les représentations linéaires complexes de dimension finie de $\pi_1(X,x)$.
La plus petite sous-catégorie $\mathcal{C}_\rho$ stable par sous-objets, quotients, facteurs directs, produits tensoriels, duaux contenant $\rho : \pi_1(X,x) \to \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ fixé est la catégorie des représentations de l'adhérence de Zariski $G(\rho)$ de $\mathrm{Im}(\rho)$. Ensuite, on fait varier ρ.

Observation : On peut récupérer le groupe algébrique $G(\rho)$ comme le groupe des automorphismes du foncteur d'oubli $\{F : \mathcal{C}_\rho \to \mathbf{C}\text{-vectoriels}\}$ respectant les structures tensorielles. C'est un énoncé de type Tannaka-Krein.

Catégories tannakiennes

Suivant Grothendieck, on peut formaliser cette idée comme suit.

Catégories tannakiennes

Suivant Grothendieck, on peut formaliser cette idée comme suit.

Définition. Une *catégorie tannakienne neutre* au-dessus d'un corps k est une catégorie abélienne k-linéaire $\mathcal{C}$ munie d'une structure tensorielle rigide et d'un foncteur fidèle exact (« foncteur fibre »)

$$\{F : \mathcal{C} \to k\text{-vectoriels de dimension finie}\}$$

respectant la structure tensorielle.

Suivant Grothendieck, on peut formaliser cette idée comme suit.

Définition. Une *catégorie tannakienne neutre* au-dessus d'un corps k est une catégorie abélienne k-linéaire $\mathcal{C}$ munie d'une structure tensorielle rigide et d'un foncteur fidèle exact (« foncteur fibre »)

$$\{F : \mathcal{C} \to k\text{-vectoriels de dimension finie}\}$$

respectant la structure tensorielle.

Notons $\mathrm{Aut}^{\otimes}(F)$ le groupe des automorphismes de F respectant les structures tensorielles.

Suivant Grothendieck, on peut formaliser cette idée comme suit.

Définition. Une *catégorie tannakienne neutre* au-dessus d'un corps k est une catégorie abélienne k-linéaire $\mathcal{C}$ munie d'une structure tensorielle rigide et d'un foncteur fidèle exact (« foncteur fibre »)

$$\{F : \mathcal{C} \to k\text{-vectoriels de dimension finie}\}$$

respectant la structure tensorielle.

Notons $\mathrm{Aut}^{\otimes}(F)$ le groupe des automorphismes de F respectant les structures tensorielles.
C'est en fait un schéma en groupes affine sur k, et même un groupe algébrique si $\mathcal{C}$ est $\otimes$-engendré par un nombre fini d'objects.

Catégories tannakiennes

Suivant Grothendieck, on peut formaliser cette idée comme suit.

Définition. Une *catégorie tannakienne neutre* au-dessus d'un corps k est une catégorie abélienne k-linéaire $\mathcal{C}$ munie d'une structure tensorielle rigide et d'un foncteur fidèle exact (« foncteur fibre »)

$$\{F : \mathcal{C} \to k\text{-vectoriels de dimension finie}\}$$

respectant la structure tensorielle.

Notons $\mathrm{Aut}^{\otimes}(F)$ le groupe des automorphismes de F respectant les structures tensorielles.
C'est en fait un schéma en groupes affine sur k, et même un groupe algébrique si $\mathcal{C}$ est $\otimes$-engendré par un nombre fini d'objects.

Théorème

Le foncteur fibre F induit une équivalence de catégories entre $\mathcal{C}$ et la catégorie des représentations k-linéaires de dimension finie du schéma en groupes affine $\mathrm{Aut}^{\otimes}(F)$.

Catégories tannakiennes

On peut également regarder des foncteurs fibres non neutres, à valeurs dans des K-vectoriels de dimension finie avec $K \supset k$, et même des $\mathcal{O}_S$-modules localement libres de rang fini pour un k-schéma S.

Catégories tannakiennes

On peut également regarder des foncteurs fibres non neutres, à valeurs dans des K-vectoriels de dimension finie avec $K \supset k$, et même des $\mathcal{O}_S$-modules localement libres de rang fini pour un k-schéma S.

On peut toujours considérer $\mathrm{Aut}^{\otimes}(F)$, mais un n'obtient une équivalence de catégories qu'au niveau des représentations de groupoïdes (Deligne, 1990).

On peut également regarder des foncteurs fibres non neutres, à valeurs dans des K-vectoriels de dimension finie avec $K \supset k$, et même des $\mathcal{O}_S$-modules localement libres de rang fini pour un k-schéma S.

On peut toujours considérer $\mathrm{Aut}^{\otimes}(F)$, mais un n'obtient une équivalence de catégories qu'au niveau des représentations de groupoïdes (Deligne, 1990).

Exemples.

- Représentations k-linéaires nilpotentes d'un groupe $\Gamma \Rightarrow$ enveloppe pro-unipotente de Γ

Catégories tannakiennes

On peut également regarder des foncteurs fibres non neutres, à valeurs dans des K-vectoriels de dimension finie avec $K \supset k$, et même des $\mathcal{O}_S$-modules localement libres de rang fini pour un k-schéma S.

On peut toujours considérer $\mathrm{Aut}^{\otimes}(F)$, mais un n'obtient une équivalence de catégories qu'au niveau des représentations de groupoïdes (Deligne, 1990).

Exemples.

- Représentations k-linéaires nilpotentes d'un groupe $\Gamma \Rightarrow$ enveloppe pro-unipotente de Γ
- modules différentielles $(M, \nabla) \Rightarrow$ (schémas en) groupes de Galois différentiels

On peut également regarder des foncteurs fibres non neutres, à valeurs dans des K-vectoriels de dimension finie avec $K \supset k$, et même des $\mathcal{O}_S$-modules localement libres de rang fini pour un k-schéma S.

On peut toujours considérer $\mathrm{Aut}^{\otimes}(F)$, mais un n'obtient une équivalence de catégories qu'au niveau des représentations de groupoïdes (Deligne, 1990).

Exemples.

- Représentations k-linéaires nilpotentes d'un groupe $\Gamma \Rightarrow$ enveloppe pro-unipotente de Γ
- modules différentielles $(M, \nabla) \Rightarrow$ (schémas en) groupes de Galois différentiels
- structures de Hodge $\Rightarrow$ groupes de Mumford–Tate

On peut également regarder des foncteurs fibres non neutres, à valeurs dans des K-vectoriels de dimension finie avec $K \supset k$, et même des $\mathcal{O}_S$-modules localement libres de rang fini pour un k-schéma S.

On peut toujours considérer $\mathrm{Aut}^{\otimes}(F)$, mais un n'obtient une équivalence de catégories qu'au niveau des représentations de groupoïdes (Deligne, 1990).

Exemples.

- Représentations k-linéaires nilpotentes d'un groupe $\Gamma \Rightarrow$ enveloppe pro-unipotente de Γ
- modules différentielles $(M, \nabla) \Rightarrow$ (schémas en) groupes de Galois différentiels
- structures de Hodge $\Rightarrow$ groupes de Mumford–Tate
- $\{\text{motifs purs sur } k \subset \mathbf{C}\}$ + réalisation de Betti $\Rightarrow$ groupes de Galois motiviques

Conclusion

Il est passionnant d'étudier plusieurs foncteurs fibres sur une même catégorie tannakienne (e.g. de motifs) et de comparer les groupes de Galois obtenus.

Conclusion

Il est passionnant d'étudier plusieurs foncteurs fibres sur une même catégorie tannakienne (e.g. de motifs) et de comparer les groupes de Galois obtenus.

Ces comparaisons expriment des correspondances profondes entre plusieurs branches des mathématiques.

Conclusion

Il est passionnant d'étudier plusieurs foncteurs fibres sur une même catégorie tannakienne (e.g. de motifs) et de comparer les groupes de Galois obtenus.

Ces comparaisons expriment des correspondances profondes entre plusieurs branches des mathématiques.

En résumé, on peut dire que Grothendieck a étendu la notion de groupe de Galois à un contexte mathématique plus large comprenant l'algèbre, la topologie, la géométrie analytique et algébrique, l'arithmétique...

Conclusion

Il est passionnant d'étudier plusieurs foncteurs fibres sur une même catégorie tannakienne (e.g. de motifs) et de comparer les groupes de Galois obtenus.

Ces comparaisons expriment des correspondances profondes entre plusieurs branches des mathématiques.

En résumé, on peut dire que Grothendieck a étendu la notion de groupe de Galois à un contexte mathématique plus large comprenant l'algèbre, la topologie, la géométrie analytique et algébrique, l'arithmétique...

Ainsi, la place des groupes de Galois au sein des mathématiques actuelles est plus importante que jamais !