

Groupes de symétrie en géométrie :  
renouvellement des perspectives dans les années 1920.

Renaud Chorlay

SPHERE (CNRS – Paris Diderot)

Bicentenaire de la naissance d'Evariste Galois

I.H.P. - 26.10.11

## Introduction : échos entre deux textes

C. Chevalley *Theory of Lie Groups* 1946

### Table des matières

- I. *The classical linear groups*
- II. *Topological groups*
- III. *Manifolds*
- IV. *Analytic groups. Lie groups.*
- V. *The differential calculus of Cartan*
- VI. *Compact Lie groups and their representations*

Dédicace : *To Elie Cartan and Hermann Weyl*

## Introduction : échos entre deux textes

E. Cartan *La théorie des groupes et les recherches récentes en géométrie différentielle* 1924

*On sait depuis M. F. Klein (Programme d'Erlangen) et S. Lie, le rôle important joué par la théorie des groupes dans la géométrie. H. Poincaré a popularisé dans le grand public scientifique cette idée fondamentale que la notion de groupe est à la base des premières spéculations géométriques. La géométrie élémentaire est au fond la théorie des invariants d'un certain groupe, le groupe des déplacements euclidiens ; elle a en effet pour but l'étude des propriétés des figures qui se conservent par un déplacement arbitraire.*

*[évocation des géométries projectives, conformes]. Dans chacune de ces géométries on attribue, pour la commodité du langage, à l'espace dans lequel les figures étudiées sont localisées les propriétés elles-mêmes du groupe correspondant, ou groupe fondamental. (...) Chacun de ces espaces est homogène, en ce sens que ses propriétés restent inaltérées par une transformation du groupe fondamental correspondant.*

*Plusieurs années avant le Programme d'Erlangen, B. Riemann avait introduit, dans son mémoire célèbre : « Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen », des espaces non homogènes au sens qui vient d'être donné à cette expression. (...) Ces espaces (...) ont surtout pris une importance considérable depuis que M. Einstein, par la théorie de la relativité généralisée, a essayé, en identifiant notre Univers à un espace de Riemann, de réunir en une seule et même théorie la gravitation, l'optique et l'électromagnétisme. Le mouvement d'idées auquel cette théorie a donné naissance a conduit, par des généralisations importantes, à des espaces nouveaux ; il suffit de citer les espaces de M. H. Weyl et les espaces de M. Eddington.*

*(...) A première vue, la notion de groupe semble étrangère à la géométrie des espaces de Riemann, car ils ne possèdent l'homogénéité d'aucun espace à groupe fondamental.*

*(...) Quel rôle la notion de groupe joue-t-elle, ou plutôt doit-elle jouer, dans ce champ nouveau de la Géométrie ; est-il possible de faire rentrer dans le cadre, suffisamment élargi, du programme d'Erlangen toutes les géométries nouvelles et une infinité d'autres, c'est ce que je me propose d'examiner.*

## Introduction

### I. Fonder la géométrie différentielle sur la notion de groupe ?

1. Selon Hermann Weyl
2. Selon Elie Cartan.
3. Un fondement « sur les groupes » non universellement partagé.

### II. Quelle notion de groupe ?

1. Pour un « groupe infinitésimal », plusieurs « groupes »
  - a. Weyl : une preuve important ses techniques de la théorie de l'uniformisation
  - b. Les questions globales sont-elles entièrement nouvelles ?
2. Les groupes comme objets « géométriques »
  - a. Le groupe sans « groupe infinitésimal » : O. Schreier
  - b. Le groupe comme objet géométrique : E. Cartan
  - c. Le groupe comme variété : E. Cartan

## Fonder la géométrie différentielle sur la notion de groupe ?

H. Weyl *Reine Infinitesimalgeometrie* 1918; *Raum, Zeit, Materie* (3<sup>ème</sup> édition) 1919

- Notion de transport de « direction » ne supposant pas de structure métrique

$$d\xi^i = -\sum_r d\gamma_r^i \xi^r \quad \text{où} \quad d\gamma_r^i = \sum_s \Gamma_{rs}^i dx_s$$

- Distinction entre le transport de « direction » et le transport de « segment »
- Le *fait fondamental* (*Grundtatsache*) de la géométrie infinitésimale

*Il s'avère par conséquent que dans une variété métrique la notion de transport parallèle infinitésimal d'un vecteur est fixée de manière univoque par les hypothèses posées. Je considère ceci comme le fait fondamental de la géométrie infinitésimale : avec la métrique d'une variété est en outre donnée la connexion affine ; le principe du transfert des longueurs apporte à lui seul un principe de transfert de direction, ou, en termes physiques, l'état de l'éther détermine le champ gravitationnel.*

H. Weyl *Das Raumproblem* 1921; *Die Einzigartigkeit der Pythagoreischen Maßbestimmung* 1922

*(...) postulat de liberté : dans le cadre donné par la nature de la métrique, ce modelage quantitatif doit être entièrement libre, et doit pouvoir subir des variations virtuelles arbitraires. (...) Bien entendu, le postulat de liberté ne suffit pas à lui seul à restreindre la nature de la métrique de l'espace. Dans le développement de la géométrie riemannienne et de la théorie de la relativité, un fait s'est affirmé toujours plus clairement comme le plus fondamental, un fait sur lequel repose la possibilité de l'ensemble du développement ; à savoir : le champ métrique détermine sans ambiguïté la connexion affine. Se pourrait-il que l'on ait découvert dans cette condition positive – jointe au postulat de libre orientation – ce qu'il y a de caractéristique dans la métrique pythagoricienne ? : quel que soit le modelage quantitatif que puisse avoir reçu le champ métrique – toujours dans les limites de la nature de la métrique –, il doit y avoir, parmi tous les systèmes de transport parallèle infinitésimal des corps vectoriels correspondant aux différents systèmes de coordonnées, un et un seul système pour lequel le transport parallèle est aussi une propagation [Verpflanzung] congruente, c.-à-d. conserve toutes les relations métriques. On doit répondre à cette question par l'affirmative.*

*(...) Le groupe infinitésimal  $\mathfrak{g}_Q$  des transformations linéaires s'écartant infiniment peu de l'identité et conservant une forme quadratique non dégénérée  $Q$  satisfait à ces trois conditions. J'affirme qu'il n'existe pas d'autre groupe  $\mathfrak{g}$  les vérifiant.*

## Fonder la géométrie différentielle sur la notion de groupe ?

E. Cartan *Sur les variétés à connexions affines et la théorie de la relativité généralisée* 1923-24

*Imaginons que l'on fasse correspondre à chaque point  $\mathbf{m}$  de l'espace un système de référence cartésien d'origine  $\mathbf{m}$  ; soient  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  les trois vecteurs qui définissent, avec  $\mathbf{m}$ , ce système de référence. (...)*

*Lorsqu'on fait varier infiniment peu les paramètres, le point  $\mathbf{m}$  et les vecteurs  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  subissent des variations infiniment petites, qui sont des vecteurs, et qui sont par suite exprimables linéairement au moyen de  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ . Soit*

$$(1) \quad \begin{cases} dm = \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2 + \omega^3 e_3 \\ de_1 = \omega_1^1 e_1 + \omega_1^2 e_2 + \omega_1^3 e_3 \\ de_2 = \omega_2^1 e_1 + \omega_2^2 e_2 + \omega_2^3 e_3 \\ de_3 = \omega_3^1 e_1 + \omega_3^2 e_2 + \omega_3^3 e_3 \end{cases}$$

*Les  $\omega^i$  et  $\omega_i^j$  sont linéaires par rapport aux différentielles  $du_i$  ; ces douze formes de Pfaff permettent en somme de repérer le système de référence d'origine  $\mathbf{m} + d\mathbf{m}$  par rapport au système de référence d'origine  $\mathbf{m}$ . On peut dire aussi qu'elles définissent le petit déplacement affine qui permet de passer de celui-ci à celui-là.*



## Fonder la géométrie différentielle sur la notion de groupe ?

E. Cartan *La théorie des groupes et les recherches récentes en géométrie différentielle* 1924

*A première vue, la notion de groupe semble étrangère à la géométrie des espaces de Riemann, car ils ne possèdent l'homogénéité d'aucun espace à groupe fondamental. Néanmoins, si un espace de Riemann ne possède pas une homogénéité absolue, il possède cependant une sorte d'homogénéité infinitésimale ; au voisinage immédiat d'un point donné il est assimilable à un espace euclidien. Toutefois, si deux petits morceaux voisins d'un espace de Riemann peuvent être assimilés chacun à un petit morceau d'espace euclidien, ces deux petits morceaux sont sans liens entre eux, ils ne peuvent pas, sans convention nouvelle, être regardés comme appartenant à un seul et même espace euclidien.*

[notion de connexion de Levi-Civita] *On peut imaginer, en chaque point d'un espace de Riemann, un espace euclidien (fictif) tangent, dont ce point et les points infiniment voisins font partie ; la définition du parallélisme de M. Levi-Civita permet alors de raccorder en un seul espace euclidien tangents en deux points infiniment voisins quelconques. (...) Si l'on considère dans l'espace de Riemann une ligne continue AB, on peut raccorder de proche en proche en un seul les espaces euclidiens tangents aux différents points de AB.*

- Lecture de ce « raccordement » comme un « développement » dans un espace euclidien.
- Caractère non holonome du « raccordement » de Levi-Civita
- Introduction sur le même modèle de la notion de connexion projective

*D'une manière générale, à tout groupe continu  $G$  correspond, dans la conception de M. Klein, une géométrie holonome ; dans la conception nouvelle, il lui correspond une infinité de géométries non holonomes.*

*(...) En résumé, dans les généralisations précédentes, l'idée directrice est la suivante. Dans les espaces holonomes au sens de M. F. Klein, tout est commandé par le groupe fondamental et ses différentes opérations. Ce sont ces opérations qui font de l'espace un tout organique. Dans les espaces non holonomes, ce sont encore les opérations du groupe qui sont un principe d'organisation, mais uniquement de proche en proche. C'est précisément en analysant ce que cette organisation a d'incomplet que nous allons arriver au rôle tout à fait nouveau que va jouer encore la notion de groupe dans les géométries nouvelles.*

Introduction du groupe d'holonomie  $g$  d'une variété (connexe) non holonome de groupe « fondamental »  $G$

*(...) à tout espace non holonome de groupe fondamental  $G$  est associé un sous-groupe  $g$  de  $G$  qui est son groupe d'holonomie et qui ne se réduit à la transformation identique que si l'espace est parfaitement holonome.*

*Le groupe d'holonomie d'un espace mesure en quelque sorte le degré de non holonomie de cet espace, de même que le groupe de Galois d'une équation algébrique mesure en quelque sorte le degré d'irrationalité des racines de cette équation.*

Usages du groupe d'holonomie  $g$

- Critère de trivialité local formulé en termes de groupes plutôt que d'invariants
- Codage d'une information topologique
- Critère d'existence de « géométries subordonnées » : *D'une manière générale, tout espace non holonome à groupe fondamental  $G$ , admettant pour groupe d'holonomie un sous-groupe  $g$  de  $G$ , pourra être regardé comme un espace non holonome admettant pour groupe fondamental tout sous-groupe de  $G$  contenant lui-même  $g$  comme sous-groupe.*  
(1927)

Fonder la géométrie différentielle sur la notion de groupe ?

Un point de vue non universellement partagé

G. Hessenberg *Vektorielle Begründung der Differentialgeometrie* 1916

J. A. Schouten *Erlanger Programm und Uebertragungslehre* 1926

O. Veblen *Differential Invariants and Geometry* 1928

[Commentant l'approche de Cartan] *But while these new relations between group theory and geometry are important and fruitful, each new step in advance makes the whole matter seem more complicated than before. The Klein theory of geometry seems to be showing the same symptoms as a physical theory whose heyday is past. More and more complicated devices have to be introduced in order to fit to the facts of nature. Its fate, I should expect will be the same as that of a physical theory – it becomes classical and its limitations as well as its merits are recognized.*

I. Fonder la géométrie différentielle sur la notion de groupe ?

1. Selon Hermann Weyl

2. Selon Elie Cartan.

3. Un fondement « sur les groupes » non universellement partagé.

II. Quelle notion de groupe ?

1. Pour un « groupe infinitésimal », plusieurs « groupes »

a. Weyl : une preuve important ses techniques de la théorie de l'uniformisation

b. Les questions globales sont-elles entièrement nouvelles ?

2. Les groupes comme objets « géométriques »

a. Le groupe sans « groupe infinitésimal » : O. Schreier

b. Le groupe comme objet géométrique : E. Cartan

c. Le groupe comme variété : E. Cartan

## Quelle notion de groupe ?

Plusieurs « groupes » pour un même « groupe infinitésimal »

H. Weyl *Das Gruppentheoretische Fundament der Tensorrechnung* 1924

*Zur Theorie der Darstellung der einfachen kontinuierlichen Gruppen* 1925-26

*A partir d'une représentation du groupe infinitésimal  $\mathfrak{g}_u^\circ$  à  $n^2-1$  paramètres réels on obtient par intégration, suivant Lie, la matrice associée  $T$  pour tous les  $t$  de  $\mathfrak{g}_u$  appartenant à un certain voisinage [Umgebung] de l'élément unité  $e$ . Mais si l'on choisit un  $t_0$  dans ce voisinage, on peut prolonger la représentation au voisinage de  $t_0$  sur lequel est appliqué le voisinage initial par la translation de  $e$  vers  $t_0$ . On voit bien que le processus de prolongement à itérer ne rencontre jamais de frontière ; mais  $T$  n'est pas nécessairement univoque sur  $\mathfrak{g}_u$ , mais seulement sur une « figure de recouvrement » [Überlagerungsgebilde] se prolongeant sans ramification ni frontière au dessus de  $\mathfrak{g}_u$ . Je dit d'une figure qu'elle est simplement connexe si toute courbe continue fermée peut, sur elle, être continûment contractée en un point. La plus forte des figures de recouvrement non-ramifiées non-limitées au dessus d'une figure donnée (la « surface de revêtement universel », qui joue un si grand rôle en théorie de l'uniformisation) est simplement connexe. Cette figure de recouvrement universelle  $\mathfrak{g}_u^*$  au dessus de  $\mathfrak{g}_u$  est le véritable groupe abstrait dont on étudie les représentations ;  $\mathfrak{g}_u$  n'est qu'une de ses représentations, et en vérité une représentation raccourcie et non homomorphe lorsque la figure de revêtement est à plusieurs feuillets.*

## Quelle notion de groupe : complète nouveauté des questions globales ?

E. Study *Kritische Betrachtungen über Lies Invariantentheorie der endlichen kontinuierlichen Gruppen* 1908

L'« erreur fondamentale » [*der Grundirrtum*] de Lie : *Il faut tout d'abord rappeler que Lie a voulu exposer dans sa théorie générale des groupes finis et continus les propriétés qui leur sont communes à tous. Mais, par la nature même des choses, cela ne pouvait être obtenu qu'en acceptant de renoncer à embrasser tout l'espace à considérer et à prendre, en général, la totalité des transformations du groupe.*

(...) *Comme une exigence exotique imposée de l'extérieur, l'indubitable compréhension théorique qu'il a, que ses notions et théorèmes n'ont de validité que dans des régions limitées, n'a jamais vraiment pris racine dans l'esprit à la créativité intuitive de Lie. Elle ne peut guère être ressentie autrement que comme une importune entrave à faire tomber à la première occasion. Ainsi, comme nous l'avons vu, dans l'espace total [Gesamtraum], il ne parle pas des invariants multivoques autrement que s'ils étaient univoques ; et chaque élimination d'équations surnuméraires demeure, de sorte qu'une opération possible im kleinen (avec certaines précautions) trouve des applications illicites dans des situations d'un tout autre type.*

(...) *Nous pensons entre autres choses à l'usage abusif de certains termes (en général, quelconque, toujours, tous, chaque) ; aux hypothèses « introduites implicitement » (autrement dit implicites) donc aux hypothèses manquantes ; aux définitions sans rives nettes et aux concepts caméléons ; enfin et surtout aux contradictions dont la littérature est pleine.*

Quelle notion de groupe ?

Complète nouveauté des questions globales ?

E. Cartan *La théorie des groupes continus et la géométrie* (d'après l'article allemand de G. Fano) 1915

*La théorie de S. Lie a l'avantage d'une très grande généralité ; mais, outre l'inconvénient d'exiger des intégrations, elle en a un autre plus grave, c'est de ne résoudre les problèmes relatifs aux invariants que du point de vue des fonctions analytiques. Ses résultats ne se rapportent en général qu'à un certain domaine autour d'un point et ne peuvent pas, à cause de la généralité même de la théorie, être étendus à tout l'espace. En particulier, la théorie de S. Lie ne peut remplacer la théorie algébrique des invariants.*



## Complète nouveauté des questions globales ?

E. Cartan *Leçons sur les invariants intégraux* 1922

*La dérivée de la dérivée d'une forme différentielle extérieure quelconque est identiquement nulle.*

*(...) Ce théorème admet une réciproque, à savoir : si la dérivée d'une forme différentielle  $\Omega$  est nulle, la forme  $\Omega$  peut-être regardée comme la dérivée d'une forme  $\Pi$  dont le degré est inférieur d'une unité à celui de  $\Omega$ .*

*(...) Remarque.- Si les coefficients de la forme  $\Omega$  sont uniformes dans un certain domaine, la condition  $\Omega' = 0$  n'est pas toujours suffisante pour assurer l'existence d'une forme  $\Pi$  uniforme dans ce domaine et dont  $\Omega$  soit la dérivée extérieure. Considérons par exemple le domaine (fermé et sans frontière) à deux dimensions formé par les points d'une sphère  $\Sigma$ , et soit  $\Omega$  une forme de degré 2 uniforme dans ce domaine (à coefficients admettant des dérivées partielles du premier ordre continu). La dérivée  $\Omega'$  est manifestement nulle. Néanmoins, s'il existait une forme  $\omega$  linéaire dont la dérivée  $\omega'$  fût égale à  $\Omega$ , on aurait, en intégrant deux fois  $\int \omega$  le long d'un même grand cercle de la sphère dans deux sens différents,  $\iint_{\Sigma} \Omega = 0$ ,*

*l'intégrale étant étendue à toute la surface de la sphère. L'équation précédente donne une condition supplémentaire pour que  $\Omega$  puisse être regardée comme dérivée exacte d'une forme  $\omega$  uniforme sur toute la sphère.*

## Quelle notion de groupe ?

### Le groupe sans groupe infinitésimal

Une origine dans le 5<sup>ème</sup> problème de Hilbert ?

*Le concept de Lie, de groupe continu de transformations, sans l'hypothèse de différentiabilité des fonctions définissant le groupe.*

O. Schreier *Abstrakte kontinuierlichen Gruppen* 1925

*Die Verwandtschaft stetiger Gruppen im Großen* 1927

- Un groupe « abstrait »
- Notion de groupe topologique
- Germe de groupe [*Gruppenkeim*], morphisme local [*im kleinen isomorph Gruppen*]
- Revêtement d'un groupe par un autre, commutativité du groupe fondamental

## Quelle notion de groupe ?

### Le groupe comme objet géométrique

E. Cartan & J.A. Schouten *On the Geometry of the Group-manifold of simple and semi-simple Groups* 1926

E. Cartan *La géométrie des groupes de transformations* 1927

*Considérons un groupe continu  $G$  à  $r$  paramètres  $a_1, a_2, \dots, a_r$  et représentons chaque transformation du groupe par un point  $(a_1, a_2, \dots, a_r)$  d'un espace à  $r$  dimensions, que nous appellerons l'espace du groupe. Dans un article récent, nous avons, M. Schouten et moi, indiqué comment on pouvait doter cet espace de trois connexions affines remarquables et intrinsèquement liées aux propriétés du groupe ; (...) Chacune de ces connexions fait de l'espace du groupe un espace affine non holonome. Deux de ces connexions sont sans courbures, ce qui, comme je l'ai déjà dit, signifie que le parallélisme des vecteurs y a une signification absolue. (...) [ces connexions] comportent au contraire une torsion et ces deux torsions sont égales et opposées. Quant à la troisième connexion, elle est sans torsion, mais elle comporte une courbure (...).*

*Les géodésiques de l'espace du groupe  $y$  sont les mêmes dans les trois connexions ; elles sont liées aux sous-groupes à un paramètre du groupe donné. (...) Beaucoup de notions et de théorèmes fondamentaux de la théorie des groupes prennent de cette manière un caractère géométrique inattendu. C'est ainsi que les constantes de structure du groupe sont celles qui définissent la torsion de l'un quelconque des espace sans courbure du groupe ; deux groupes qui admettent le même espace sans courbure sont donc isomorphes. Au contraire, il peut arriver que deux groupes admettent le même espace sans torsion sans être isomorphes ; l'identité des espaces sans torsion de deux groupes définit par suite une sorte d'isomorphisme plus général que l'isomorphisme classique, qu'on pourrait appeler l'isomorphisme affine.*

*(...) Parmi les groupes continus, une classe est particulièrement importante, c'est celle des groupes simples ou semi-simples. Les espaces sans torsion de ces groupes sont riemanniens, avec un  $ds^2$  qui n'est pas nécessairement défini. Ils font parti d'une catégorie plus générale d'espaces riemanniens, caractérisés par la propriété que le transport par parallélisme  $y$  conserve la courbure riemannienne.*

## Quelle notion de groupe ? Le groupe comme variété

E. Cartan *Sur les nombres de Betti des espaces de groupe clos* 1928

*Sur les invariants intégraux de certains espaces homogènes clos et les propriétés topologiques de ces espaces* 1929

[on peut chercher à utiliser] avec H. Poincaré, les intégrales multiples de différentielles exactes définies dans l'espace  $E$  et admettant des périodes. On démontre facilement que, pour avoir toutes les intégrales de cette nature, il suffit de se borner au cas où l'élément différentiel est invariant par tous les déplacements de l'espace  $E$  (qui est, comme on sait, un espace de Riemann). Il suffit, étant donné le groupe linéaire adjoint  $\Gamma$  de  $G$ , opérant sur les variables  $e_1, \dots, e_r$ , de construire toutes les formes extérieures en  $e_1, \dots, e_r$  invariantes par  $\Gamma$ , et d'y remplacer les  $e_i$  par les formes différentielles linéaires  $\omega_i$  qui entrent dans le symbole  $\Sigma_i \omega_i X_i f$  de la transformation infinitésimale  $S_{\xi+d\xi} S_{\xi}^{-1}$  du groupe. L'élément d'intégrale multiple ainsi obtenu est de lui-même une différentielle exacte. (...) Les intégrales de différentielles exactes de la forme indiquées ci-dessus peuvent être formées par voie purement algébrique.

Deux théorèmes conjecturés :

*Théorème A.— Si une intégrale de différentielle exacte d'ordre  $p$ , définie dans l'espace clos  $E$ , est nulle pour tout domaine d'intégration fermé à  $p$  dimensions, elle résulte, par l'application de la formule de Stokes généralisée, d'une intégrale multiple d'ordre  $p-1$  (définie et régulière dans tout l'espace).*

(...)

*Théorème B.— Si l'on considère  $h$  variétés fermées à  $p$  dimensions entre lesquelles n'existe aucune homologie, il existe  $h$  intégrales de différentielles exactes telles que le tableau carré des valeurs de ces intégrales étendues aux  $h$  variétés ait un déterminant différent de zéro.*

## Quelle notion de groupe ?    Le groupe comme variété

Rappel : l'introduction « classique » de la théorie de Lie (1880)

*Qu'on regarde dans les  $n$  équations*

$$x_i' = f_i(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_r), \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

*les grandeurs  $x_1', \dots, x_n'$  comme les variables primitives, les  $x_1, \dots, x_n$  comme de nouvelles variables, et les  $a_1, \dots, a_r$  comme des paramètres, alors ces équations définissent une infinité  $r$ -uple de transformations. Je dis qu'une telle famille [Schaar] de transformations forme un groupe si la succession de deux transformations de la famille est équivalente à une unique transformation de la même famille ; si, autrement dit, des équations*

$$x_i' = f_i(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_r) = f_i(a), \quad x_i'' = f_i(x_1', \dots, x_n', b_1, \dots, b_r),$$

*il suit*

$$x_i'' = f_i(x_1, \dots, x_n, c_1, \dots, c_r),$$

*où les grandeurs  $c_1, \dots, c_r$  ne dépendent que des  $a$  et  $b$ , mais ni des  $x$  ni du nombre  $i$ . (...)*

## Quelle notion de groupe ?    Le groupe comme variété

E. Cartan *La théorie des groupes finis et continus et l'analysis situs* 1930

- Définition d'une variété (topologique) inspirée de Hausdorff (1914)
- Notion de groupe topologique :
  - Distinction entre morphisme et morphisme local
  - Le groupe n'est pas donné *a priori* par son action sur un ensemble
- Notion de groupe *de Lie* : groupe topologique muni d'une multiplication différentiable
- Relecture du 3<sup>ème</sup> théorème fondamental de la théorie de Lie :

*On a obtenu en somme un morceau de groupe opérant dans un morceau d'espace.*



## **Bibliographie :**

R. Chorlay, *Passer au global : le cas d'Élie Cartan, 1922-1930*.

Revue d'histoire des mathématiques 15 (2), 2009, p.231-316.

R. Chorlay, *Géométrie et topologie différentielles 1918-1932* (textes traduits et annotés par R. Chorlay).

Paris : Hermann, à paraître (2012).

Merci pour votre attention

