# Représentations galoisiennes, motifs et fonctions $L$

Jean-Marc Fontaine

# 0 – La géométrie arithmétique

Etude des systèmes d'équations polynomiales à coefficients entiers (Diophante)

# 0 – La géométrie arithmétique

Etude des systèmes d'équations polynomiales à coefficients entiers (Diophante) $=$ Schémas de type fini sur $\mathbb{Z}$.

# 0 – La géométrie arithmétique

Etude des systèmes d'équations polynomiales à coefficients entiers (Diophante) $=$ Schémas de type fini sur $\mathbb{Z}$.

$$P_1, P_2, \ldots, P_m \in \mathbb{Z}[X_1, X_2, \ldots, X_n] \ \mapsto \ \text{le schéma affine} \ \ X = \operatorname{Spec} A$$
$$\text{avec} \ \ A = \mathbb{Z}[X_1, X_2, \ldots, X_n]/(P_1, P_2, \ldots, P_m) \ .$$

# 0 – La géométrie arithmétique

Etude des systèmes d'équations polynomiales à coefficients entiers (Diophante) $=$ Schémas de type fini sur $\mathbb{Z}$.

$$P_1, P_2, \ldots, P_m \in \mathbb{Z}[X_1, X_2, \ldots, X_n] \;\mapsto\; \text{le schéma affine} \;\; X = \mathrm{Spec}\, A$$
$$\text{avec} \;\; A = \mathbb{Z}[X_1, X_2, \ldots, X_n]/(P_1, P_2, \ldots, P_m) \; .$$

Si $R$ est un anneau commutatif,

$$X(R) = \big\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n \mid P_1(x_1, \ldots, x_n) = \ldots = P_m(x_1, \ldots, x_n) = 0\big\}$$
$$= \mathrm{Hom}_{\mathrm{anneaux}}(A, R) \; .$$

On obtient un schéma de type fini sur $\mathbb{Z}$ par recollement d'un nombre fini de schémas affines de type fini sur $\mathbb{Z}$.

# 0 – La géométrie arithmétique

Etude des systèmes d'équations polynomiales à coefficients entiers (Diophante) $=$ Schémas de type fini sur $\mathbb{Z}$.

$$P_1, P_2, \ldots, P_m \in \mathbb{Z}[X_1, X_2, \ldots, X_n] \ \mapsto \ \text{le schéma affine} \ \ X = \mathrm{Spec}\, A$$
$$\text{avec} \ \ A = \mathbb{Z}[X_1, X_2, \ldots, X_n]/(P_1, P_2, \ldots, P_m)\ .$$

Si $R$ est un anneau commutatif,

$$X(R) = \big\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n \mid P_1(x_1, \ldots, x_n) = \ldots = P_m(x_1, \ldots, x_n) = 0\big\}$$
$$= \mathrm{Hom}_{\mathrm{anneaux}}(A, R)\ .$$

On obtient un schéma de type fini sur $\mathbb{Z}$ par recollement d'un nombre fini de schémas affines de type fini sur $\mathbb{Z}$. De façon analogue : schémas de présentation finie sur $\Lambda$, anneau commutatif quelconque (en remplaçant $\mathbb{Z}$ par $\Lambda$).

# 0 – La géométrie arithmétique

Etude des systèmes d'équations polynomiales à coefficients entiers (Diophante) = Schémas de type fini sur $\mathbb{Z}$.

$$P_1, P_2, \ldots, P_m \in \mathbb{Z}[X_1, X_2, \ldots, X_n] \ \mapsto \ \text{le schéma affine} \ \ X = \operatorname{Spec} A$$
$$\text{avec} \ \ A = \mathbb{Z}[X_1, X_2, \ldots, X_n]/(P_1, P_2, \ldots, P_m) \ .$$

Si $R$ est un anneau commutatif,

$$X(R) = \big\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n \mid P_1(x_1, \ldots, x_n) = \ldots = P_m(x_1, \ldots, x_n) = 0\big\}$$
$$= \mathrm{Hom}_{\mathrm{anneaux}}(A, R) \ .$$

On obtient un schéma de type fini sur $\mathbb{Z}$ par recollement d'un nombre fini de schémas affines de type fini sur $\mathbb{Z}$. De façon analogue : schémas de présentation finie sur $\Lambda$, anneau commutatif quelconque (en remplaçant $\mathbb{Z}$ par $\Lambda$).

Conjectures de Weil (1949, Numbers of solutions of equations in finite fields) démontrées par Deligne en 1974.
On peut déformer les représentations galoisiennes (Mazur, 1989, Deforming Galois representations, cf exposé de Mattew Emerton).

# 1 – Fontions $L$

## Séries de Dirichlet

$$(a_n)_{n\geq 1} \text{ une suite de nombres complexes } \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-s\log(n)} \; .$$

Abscisse de convergence $\sigma_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. La série converge et définit une fonction holomorphe pour $\mathcal{R}e(s) > \sigma_0$.
Prolongement analytique méromorphe dans tout le plan complexe ? ?

# 1 – Fontions $L$

## Séries de Dirichlet

$(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres complexes $\mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-s\log(n)}$ .

Abscisse de convergence $\sigma_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. La série converge et définit une fonction holomorphe pour $\mathcal{R}e(s) > \sigma_0$.
Prolongement analytique méromorphe dans tout le plan complexe ? ?

La fonction zêta d'un schéma $X$ de type fini sur $\mathbb{Z}$

$$\zeta(X,s) = \prod_{x \text{ point fermé de } X} \frac{1}{1 - N(x)^{-s}} \quad \text{( produit eulérien )} \quad .$$

Si $X = \mathrm{Spec}\, A$, les points fermés de $X$ sont les idéaux maximaux de $A$.
Si $x$ est l'un d'eux, $N(x)$ est le cardinal du corps fini $k(x) = A/x$.

# 1 – Fontions $L$

## Séries de Dirichlet

$$(a_n)_{n\geq 1} \text{ une suite de nombres complexes } \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-s\log(n)} .$$

Abscisse de convergence $\sigma_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. La série converge et définit une fonction holomorphe pour $\mathcal{R}e(s) > \sigma_0$.
Prolongement analytique méromorphe dans tout le plan complexe ? ?

### La fonction zêta d'un schéma $X$ de type fini sur $\mathbb{Z}$

$$\zeta(X,s) = \prod_{x \text{ point fermé de } X} \frac{1}{1-N(x)^{-s}} \quad (\text{ produit eulérien }) .$$

Si $X = \mathrm{Spec}\, A$, les points fermés de $X$ sont les idéaux maximaux de $A$.
Si $x$ est l'un d'eux, $N(x)$ est le cardinal du corps fini $k(x) = A/x$.
$\forall N$, il n'y a qu'un nombre fini de points fermés $x$ tels que $N(x) \leq N$

$$\Rightarrow \zeta(X,s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s} \text{ avec les } a_n \in \mathbb{N} .$$

Converge pour $\mathcal{R}e(s) > d$, la dimension de $X$.

# Exemples

1 – La fonction zêta de Riemann :

$$\zeta(\mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}, s) = \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s)\ .$$

# Exemples

1 – La fonction zêta de Riemann :

$$\zeta(\mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}, s) = \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s) \ .$$

2 – La fonction zêta d'une variété sur un corps fini :

Si $X$ est projective lisse sur $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ($p$ un nombre premier), tous les corps résiduels sont des extensions finies de $\mathbb{F}_p$ et les $N(x)$ sont tous des puissances de $p$.

# Exemples

1 – La fonction zêta de Riemann :

$$\zeta(\mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}, s) = \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1-p^{-s}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s)\ .$$

2 – La fonction zêta d'une variété sur un corps fini :

Si $X$ est projective lisse sur $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ($p$ un nombre premier), tous les corps résiduels sont des extensions finies de $\mathbb{F}_p$ et les $N(x)$ sont tous des puissances de $p$. Si $\nu_n$ est le cardinal de $X(\mathbb{F}_{p^n})$, on a

$$\zeta(X, s) = Z(X, p^{-s}) \text{ avec } Z(X, T) = \exp\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} \nu_n \frac{T^n}{n}\Big) \in \mathbb{Z}[[T]]\ .$$

# Exemples

1 – La fonction zêta de Riemann :

$$\zeta(\mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}, s) = \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1-p^{-s}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s)\ .$$

2 – La fonction zêta d'une variété sur un corps fini :

Si $X$ est projective lisse sur $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ($p$ un nombre premier), tous les corps résiduels sont des extensions finies de $\mathbb{F}_p$ et les $N(x)$ sont tous des puissances de $p$. Si $\nu_n$ est le cardinal de $X(\mathbb{F}_{p^n})$, on a

$$\zeta(X,s) = Z(X,p^{-s}) \ \text{ avec } \ Z(X,T) = \exp\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} \nu_n \frac{T^n}{n}\Big) \in \mathbb{Z}[[T]]\ .$$

$$\text{Weil+Deligne} \Rightarrow \ Z(X,T) = \frac{P_{X,1}(T)P_{X,3}(T)\dots P_{X,2d-1}(T)}{P_{X,0}(T)P_{X,2}(T)\dots P_{X,2d}(T)}$$

où chaque $P_{X,m} \in \mathbb{Z}[T]$ et s'écrit dans $\mathbb{C}[T]$

$$P_{X,m}(T) = \prod_{i=1}^{b_m}(1-\lambda_{m,i}T)$$

avec $|\sigma(\lambda_{m,i})| = p^{m/2}$ pour tout automorphisme $\sigma$ de $\mathbb{C}$ (ou tout $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$, les $\lambda_{m,i}$ sont dans $\overline{Q}$) : Les $\lambda_{m,i}$ sont des $p$-nombres de Weil de poids $m$.

# Représentations $\ell$-adiques

Soient $\ell$ un nombre premier, $F$ un corps, $F^s$ une clôture séparable de $F$ et $G_F = \mathrm{Gal}(F_s/F)$. Une *représentation $\ell$-adique de $G_F$* est la donnée d'un espace vectoriel de dimension finie $V$ sur une extension finie $E$ du corps $\mathbb{Q}_\ell$ des nombres $\ell$-adiques muni d'une action linéaire continue de $G_F$

$$\rho : G_F \to \mathrm{Aut}_E(V) \qquad (\simeq GL_d(E) \ \text{ si } V \text{ est de dimension } d \text{ sur } E\ ).$$

Si $E = \mathbb{Q}_\ell$, « continue » signifie que l'on peut choisir une base pour que $\rho(g) \in GL_d(\mathbb{Z}_\ell)$ pour tout $g$ et que, pour tout entier $n$, l'homomorphisme naturel

$$\rho_n : G_F \to GL_d(\mathbb{Z}_\ell) \to GL_d(\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})$$

se factorise à travers le groupe de Galois d'une extension finie galoisienne $F_n$ de $F$ contenue dans $F^s$.

# Représentations $\ell$-adiques

Soient $\ell$ un nombre premier, $F$ un corps, $F^s$ une clôture séparable de $F$ et $G_F = \mathrm{Gal}(F_s/F)$. Une *représentation $\ell$-adique de $G_F$* est la donnée d'un espace vectoriel de dimension finie $V$ sur une extension finie $E$ du corps $\mathbb{Q}_\ell$ des nombres $\ell$-adiques muni d'une action linéaire continue de $G_F$

$$\rho : G_F \to \mathrm{Aut}_E(V) \qquad (\simeq GL_d(E) \text{ si } V \text{ est de dimension } d \text{ sur } E\,).$$

Si $E = \mathbb{Q}_\ell$, « continue » signifie que l'on peut choisir une base pour que $\rho(g) \in GL_d(\mathbb{Z}_\ell)$ pour tout $g$ et que, pour tout entier $n$, l'homomorphisme naturel

$$\rho_n : G_F \to GL_d(\mathbb{Z}_\ell) \to GL_d(\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})$$

se factorise à travers le groupe de Galois d'une extension finie galoisienne $F_n$ de $F$ contenue dans $F^s$.

## Exemples

– Si $A$ est une variété abélienne de dimension $g$ sur $F$, alors $V_\ell(A) = \mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} T_\ell(A)$ est une représentation $\ell$-adique de $G_F$ (de dimension $2g$ sur $\mathbb{Q}_\ell$ si $\ell$ est différent de la caractéristique de $F$).
– Si $X$ est une variété projective lisse sur $F$et si $m \in \mathbb{N}$, alors $H^m_{ét}(X_{F^s}, \mathbb{Q}_\ell)$ est une représentation $\ell$-adique de $G_F$ (de dimension $b_m(X)$ sur $\mathbb{Q}_\ell$ si $\ell$ est différent de la caractéristique de $F$).

# Représentations $\ell$-adiques de $G_{\mathbb{Q}}$

*In my opinion the most interesting questions about* $G_{\mathbb{Q}}$ *is to describe it together with the distinguished subgroups* $G_{\mathbb{R}}, G_{\mathbb{Q}_p}, I_{\mathbb{Q}_p}$ *and the distinguished elements* $\mathrm{Frob}_p \in G_{\mathbb{Q}_p}/I_{\mathbb{Q}_p}$ (Richard Taylor, ICM, Beijing 2002).

# Représentations $\ell$-adiques de $G_{\mathbb{Q}}$

*In my opinion the most interesting questions about $G_{\mathbb{Q}}$ is to describe it together with the distinguished subgroups $G_{\mathbb{R}}, G_{\mathbb{Q}_p}, I_{\mathbb{Q}_p}$ and the distinguished elements* $\mathrm{Frob}_p \in G_{\mathbb{Q}_p}/I_{\mathbb{Q}_p}$ (Richard Taylor, ICM, Beijing 2002).

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbb{Q} & \subset & \mathbb{Q}_p & \supset & \mathbb{Z}_p & \twoheadrightarrow & \mathbb{F}_p \\
\cap & & \cap & & \cap & & \cap \\
\overline{\mathbb{Q}} & \subset & \overline{\mathbb{Q}}_p & \supset & \overline{\mathbb{Z}}_p & \twoheadrightarrow & \overline{\mathbb{F}_p}
\end{array}$$

# Représentations $\ell$-adiques de $G_{\mathbb{Q}}$

*In my opinion the most interesting questions about* $G_{\mathbb{Q}}$ *is to describe it together with the distinguished subgroups* $G_{\mathbb{R}}, G_{\mathbb{Q}_p}, I_{\mathbb{Q}_p}$ *and the distinguished elements* $\mathrm{Frob}_p \in G_{\mathbb{Q}_p}/I_{\mathbb{Q}_p}$ (Richard Taylor, ICM, Beijing 2002).

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{Q} & \subset & \mathbb{Q}_p & \supset & \mathbb{Z}_p & \twoheadrightarrow & \mathbb{F}_p \\ \cap & & \cap & & \cap & & \cap \\ \overline{\mathbb{Q}} & \subset & \overline{\mathbb{Q}}_p & \supset & \overline{\mathbb{Z}}_p & \twoheadrightarrow & \overline{\mathbb{F}_p} \end{array}$$

$$G_{\mathbb{Q}_p} \subset G_{\mathbb{Q}}$$

$$1 \to I_{\mathbb{Q}_p} \to G_{\mathbb{Q}_p} \to G_{\mathbb{F}_p} \to 1$$

Si $x \in \overline{\mathbb{F}_p}$, $\mathrm{Frob}_p(x) = x^p$ est le *Frobenius arithmétique*. Son inverse $f_p$ est le *frobenius géométrique*.

# Représentations $\ell$-adiques de $G_{\mathbb{F}_p}$

Le Frobenius engendre un sous-groupe de $G_{\mathbb{F}_p}$ isomorphe à $\mathbb{Z}$ et dense dans $G_{\mathbb{F}_p}$. Si

$$\rho : G_{\mathbb{F}_p} \to GL_d(E)$$

est une représentation $\ell$-adique de $G_{\mathbb{F}_p}$, la matrice $\alpha = \rho(f_p)$ détermine $\rho$.

# Représentations $\ell$-adiques de $G_{\mathbb{F}_p}$

Le Frobenius engendre un sous-groupe de $G_{\mathbb{F}_p}$ isomorphe à $\mathbb{Z}$ et dense dans $G_{\mathbb{F}_p}$. Si

$$\rho : G_{\mathbb{F}_p} \to GL_d(E)$$

est une représentation $\ell$-adique de $G_{\mathbb{F}_p}$, la matrice $\alpha = \rho(f_p)$ détermine $\rho$. Réciproquement, étant donné $\alpha \in GL_d(E)$, il existe $\rho : G_{\mathbb{F}_p} \to GL_d(E)$ telle que $\rho(f_p) = \alpha$ si et seulement si les valeurs propres de $\alpha$ sont des unités (i.e. des éléments $\lambda \in \overline{E}$ tels que $|\lambda| = 1$).

# Représentations $\ell$-adiques de $G_{\mathbb{F}_p}$

Le Frobenius engendre un sous-groupe de $G_{\mathbb{F}_p}$ isomorphe à $\mathbb{Z}$ et dense dans $G_{\mathbb{F}_p}$. Si

$$\rho : G_{\mathbb{F}_p} \to GL_d(E)$$

est une représentation $\ell$-adique de $G_{\mathbb{F}_p}$, la matrice $\alpha = \rho(f_p)$ détermine $\rho$.
Réciproquement, étant donné $\alpha \in GL_d(E)$, il existe $\rho : G_{\mathbb{F}_p} \to GL_d(E)$ telle que $\rho(f_p) = \alpha$ si et seulement si les valeurs propres de $\alpha$ sont des unités (i.e. des éléments $\lambda \in \overline{E}$ tels que $|\lambda| = 1$).
La semi-simplification de la représentation $\rho$ est déterminée par le polynôme caractéristique de $\alpha$ ou, ce qui revient au même, par le polynôme $P_\rho(T) = \det(1 - \alpha T)$.

# Représentations $\ell$-adiques de $G_{\mathbb{F}_p}$

Le Frobenius engendre un sous-groupe de $G_{\mathbb{F}_p}$ isomorphe à $\mathbb{Z}$ et dense dans $G_{\mathbb{F}_p}$. Si

$$\rho : G_{\mathbb{F}_p} \to GL_d(E)$$

est une représentation $\ell$-adique de $G_{\mathbb{F}_p}$, la matrice $\alpha = \rho(f_p)$ détermine $\rho$. Réciproquement, étant donné $\alpha \in GL_d(E)$, il existe $\rho : G_{\mathbb{F}_p} \to GL_d(E)$ telle que $\rho(f_p) = \alpha$ si et seulement si les valeurs propres de $\alpha$ sont des unités (i.e. des éléments $\lambda \in \overline{E}$ tels que $|\lambda| = 1$).
La semi-simplification de la représentation $\rho$ est déterminée par le polynôme caractéristique de $\alpha$ ou, ce qui revient au même, par le polynôme $P_\rho(T) = \det(1 - \alpha T)$. Ou encore par la fonction $L$ de $\rho$

$$L(\rho, T) = \frac{1}{1 - P_\rho(p^{-s})} \ .$$

(Ici on a implicitement choisi un plongement de $E$ dans $\mathbb{C}$.)

# Encore les conjectures de Weil

Si $X$ est une variété projective lisse sur $\mathbb{F}_p$ et si $m \in \mathbb{N}$, alors $P_{X,m}(T) = P_{H^m(X_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathbb{Q}_\ell)}(T) \in \mathbb{Z}[T]$, est indépendant de $\ell \neq p$ et les valeurs propres sont des nombres de Weil de poids $m$.

# Encore les conjectures de Weil

Si $X$ est une variété projective lisse sur $\mathbb{F}_p$ et si $m \in \mathbb{N}$, alors $P_{X,m}(T) = P_{H^m(X_{\overline{\mathbb{F}}_p},\mathbb{Q}_\ell)}(T) \in \mathbb{Z}[T]$, est indépendant de $\ell \neq p$ et les valeurs propres sont des nombres de Weil de poids $m$.
En particulier, la fonction $\zeta(X,s)$ s'écrit comme un produit alterné des fonctions $L$ des représentations fournies par la cohomologie étale $\ell$-adique.

# Motifs

Si $F$ est un corps, on voudrait fabriquer à partir de la catégorie des variétés projectives lisses sur $F$ une catégorie tannakienne neutre $\mathcal{M}(F)_{\mathbb{Q}}$ sur $\mathbb{Q}$, la catégorie des motifs purs sur $F$. On voudrait aussi disposer, pour tout nombre premier $\ell$ différent de la caractéristique de $F$, d'un $\otimes$-foncteur *réalisation $\ell$-adique*

$$H_\ell : \mathcal{M}_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(G_F)$$

dont on espère, lorsque $F$ est de type fini sur son sous-corps premier qu'il induit une équivalence entre la catégorie tannakienne sur $\mathbb{Q}_\ell$ déduite de $\mathcal{M}(F)_{\mathbb{Q}}$ et une sous-catégorie pleine de $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(G_F)$, la catégorie $\mathrm{Rep}^{\text{géo,ss}}_{\mathbb{Q}_\ell}(G)$ des représentations géométriques semi-simples.

# Motifs

Si $F$ est un corps, on voudrait fabriquer à partir de la catégorie des variétés projectives lisses sur $F$ une catégorie tannakienne neutre $\mathcal{M}(F)_{\mathbb{Q}}$ sur $\mathbb{Q}$, la catégorie des motifs purs sur $F$. On voudrait aussi disposer, pour tout nombre premier $\ell$ différent de la caractéristique de $F$, d'un $\otimes$-foncteur *réalisation $\ell$-adique*

$$H_\ell : \mathcal{M}_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(G_F)$$

dont on espère, lorsque $F$ est de type fini sur son sous-corps premier qu'il induit une équivalence entre la catégorie tannakienne sur $\mathbb{Q}_\ell$ déduite de $\mathcal{M}(F)_{\mathbb{Q}}$ et une sous-catégorie pleine de $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(G_F)$, la catégorie $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}^{\text{géo,ss}}(G)$ des représentations géométriques semi-simples.

Exemples : 1 – Une variété abélienne $A$ est un motif pur de poids $-1$ et $H_\ell(A) = V_\ell(A)$.

2 – A $X$ variété projective lisse sur $F$ et $m \in \mathbb{N}$, on doit pouvoir associer le motif $h^m(X)$ avec $H_\ell(h^m(X)) = H^m_{ét}(X_{F^s}, \mathbb{Q}_\ell)$.

# Représentations $\ell$-adiques géométriques de $G_{\mathbb{Q}}$

Quelles sont les représentations $\ell$-adiques fournies par la cohomologie des variétés algébriques ?
Si $p$ est un nombre premier, on dit qu'une représentation $\ell$-adique $W$ de $G_{\mathbb{Q}_p}$ est *non ramifiée* si $I_{\mathbb{Q}_p}$ opère trivialement. C'est donc la même chose qu'une représentation $\ell$-adique de $G_{\mathbb{F}_p}$ et on peut définir $P_W(T)$ et $L(W, s)$.

# Représentations $\ell$-adiques géométriques de $G_{\mathbb{Q}}$

Quelles sont les représentations $\ell$-adiques fournies par la cohomologie des variétés algébriques ?
Si $p$ est un nombre premier, on dit qu'une représentation $\ell$-adique $W$ de $G_{\mathbb{Q}_p}$ est *non ramifiée* si $I_{\mathbb{Q}_p}$ opère trivialement. C'est donc la même chose qu'une représentation $\ell$-adique de $G_{\mathbb{F}_p}$ et on peut définir $P_W(T)$ et $L(W, s)$.

Soit $V$ une représentation $\ell$-adique. Pour tout nombre premier $p$, $V^{I_{\mathbb{F}_p}}$ est une représentation non ramifiée de $G_{\mathbb{Q}_p}$ et on peut poser

$$L_p(V, s) = L_( V^{I_{\mathbb{F}_p}}, s) \ .$$

Si $S$ est un sous-ensemble de l'ensemble des nombres premiers, considérons la fonction

$$L^S(V, s) = \prod_{p \notin S} L_p(V, s) \ .$$

Le théorème de Chebotarev implique que, *si $V$ est non ramifiée en dehors d'un nombre fini de nombres premiers et si $S$ est fini, alors $V$ est déterminée par $L^S(V, s)$.*

$X$ projectif lisse sur $\mathbb{Q}$, $M = h^m(X)$. Pour tout nombre premier $\ell$, $H_\ell(M)$ est une représentation $\ell$-adique dont la dimension $r$ est indépendante de $\ell$.
Il existe un ensemble fini $S$ de nombres premiers tel que, pour tout $\ell$, $H_\ell(M)$ est non ramifiée en dehors de $S \cup \{p\}$. En outre, pour $p \notin S$,

$$L_p(M, s) = L_p(H_\ell(M), s)$$

est indépendant de $\ell \neq p$.

$X$ projectif lisse sur $\mathbb{Q}$, $M = h^m(X)$. Pour tout nombre premier $\ell$, $H_\ell(M)$ est une représentation $\ell$-adique dont la dimension $r$ est indépendante de $\ell$.
Il existe un ensemble fini $S$ de nombres premiers tel que, pour tout $\ell$, $H_\ell(M)$ est non ramifiée en dehors de $S \cup \{p\}$. En outre, pour $p \notin S$,

$$L_p(M, s) = L_p(H_\ell(M), s)$$

est indépendant de $\ell \neq p$. Conjecturalement, pour tout nombre premier

$$L_p(M, s) = L_p(H_\ell(M)^{I_{\mathbb{Q}_p}}, s)$$

est indépendant de $\ell \neq p$. Permet de définir

$$L(M, s) = \prod_{p \text{ premier}} L_p(M, s) \; .$$

$X$ projectif lisse sur $\mathbb{Q}$, $M = h^m(X)$. Pour tout nombre premier $\ell$, $H_\ell(M)$ est une représentation $\ell$-adique dont la dimension $r$ est indépendante de $\ell$.
Il existe un ensemble fini $S$ de nombres premiers tel que, pour tout $\ell$, $H_\ell(M)$ est non ramifiée en dehors de $S \cup \{p\}$. En outre, pour $p \notin S$,

$$L_p(M,s) = L_p(H_\ell(M), s)$$

est indépendant de $\ell \neq p$. Conjecturalement, pour tout nombre premier

$$L_p(M,s) = L_p(H_\ell(M)^{I_{\mathbb{Q}_p}}, s)$$

est indépendant de $\ell \neq p$. Permet de définir

$$L(M,s) = \prod_{p \text{ premier}} L_p(M,s) \ .$$

On veut
a) pouvoir définir $L(H_\ell(M), s)$ de façon que $L(M,s) = L(H_\ell(M), s)$,
b) définir les représentations $\ell$-adiques géométriques. Pour cela, on a besoin de la théorie de Hodge $p$-adique.

$$\mathbb{Q}_p \subset B_{cris} \subset B_{dR}$$

$G_{\mathbb{Q}_p}$ opère sur $B_{dR}$ et $B_{cris}$ est stable par $G_{\mathbb{Q}_p}$. En outre, $B_{cris}$ est muni d'un endomorphisme $\varphi$ de $\mathbb{Q}_p$-algèbres qui commute à l'action de $G_{\mathbb{Q}_p}$. Si $V$ est une représentation $p$-adique de $G_{\mathbb{Q}_p}$

$$D_{cris}(V) = (B_{cris} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K} \subset D_{dR}(V) = (B_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_{\mathbb{Q}_p}}$$

sont des $\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels de dimension finie $\leq$ à la dimension de $V$. On dit que $V$ est *de de Rham* si la dimension de $D_{dR}(V)$ est égale à celle de $V$.

Une représentation $\ell$-adique $V$ de $G_{\mathbb{Q}}$ est *géométrique* si elle est non ramifiée en dehors d'un ensemble fini de nombres premiers et de de Rham en $\ell = p$. On définit alors sa fonction $L$ par

$$L(V, s) = \prod_{p \text{ premier}} L_p(V, s)$$

avec $L_p(V, s) = L_p(V^{I_{\mathbb{Q}_p}}, s)$ si $p \neq \ell$
et $L_p(V, s) = \frac{1}{P_p(p^{-s})}$ où $P_p(V, T) = \det(1 - \varphi \mid_{D_{cris}(V)} T)$ si $p = \ell$.