Aspects algorithmiques de la théorie des équations au XVIII^{e} et début XIX^{e}

Dominique Tournès

« [L'Algèbre] se partage naturellement en trois articles principaux.
1° La théorie générale des équations […]
2° Leur résolution générale […]
3° La résolution des équations numériques […]

Cette dernière recherche est sans contredit la plus utile dans l'application : car, outre que la résolution générale ne s'étend pas au-delà du 4^{e} degré, les formules en sont déjà si compliquées, et le seraient tellement pour les degrés supérieurs, si l'on venait à les découvrir, qu'on ne pourrait jamais s'en servir pour le calcul des racines. Aussi il faudrait encore recourir aux formules d'approximation […] »

Louis Poinsot
1808

Évariste Galois, Note sur la résolution des équations numériques, *Bulletin des sciences mathématiques, physiques et chimiques*, 13 (1830), 413-414

BULLETIN
DES SCIENCES MATHÉMATIQUES,
PHYSIQUES ET CHIMIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. STURM ET GAULTIER DE CLAUBRY.

1re SECTION DU BULLETIN UNIVERSEL,

PUBLIÉ

PAR LA SOCIÉTE

POUR LA

PROPAGATION DES CONNAISSANCES

SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES,

ET SOUS LA DIRECTION

DE M. LE BARON DE FÉRUSSAC.

TOME TREIZIÈME.

A PARIS,
Au Bureau central du Bulletin, rue de l'Abbaye, n° 3,
Et chez M. Bachelier, quai des Augustins, n° 55;
Paris, Strasbourg et Londres, chez MM. Treuttel et Wurtz;
Leipzig, MM. Brockhaus.
1830.

216. NOTE SUR LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES; par M. E. GALOIS.

M. Legendre a le premier remarqué que, lorsqu'une équation algébrique était mise sous la forme

$$\varphi x = x$$

où φx est une fonction de x qui croît constamment en même temps que x, il était facile de trouver la racine de cette équation immédiatement plus petite qu'un nombre donné a, si $\varphi a < a$, et la racine immédiatement plus grande que a, si $\varphi a > a$.

Pour le démontrer, on construit la courbe $y = \varphi x$ et la droite $y = x$. Soit prise une abscisse $= a$, et supposons, pour fixer les idées, $\varphi a > a$, je dis qu'il sera aisé d'obtenir la racine immédiatement supérieure à a. En effet, les racines de l'équation $\varphi x = x$ ne sont que les abscisses des points d'intersection de la droite et de la courbe, et il est clair que l'on s'approchera du point le plus voisin d'intersection, en substituant à l'abscisse a l'abcisse φa. On aura une valeur plus approchée encore en prenant $\varphi\varphi a$, puis $\varphi\varphi\varphi a$, et ainsi de suite.

Soit $F x = o$ une équation donnée du degré n, et $F x = X - Y$, X et Y n'ayant que des termes positifs. M. Legendre met successivement l'équation sous ces deux formes

$$x = \varphi x = \sqrt[n]{\frac{X}{\left(\frac{Y}{x^n}\right)}} \qquad x = \psi x = \sqrt[n]{\frac{X}{\left(\frac{x^n}{Y}\right)}}$$

les deux fonctions φx et ψx sont toujours, comme on voit, l'une plus grande, l'autre plus petite que x. Ainsi, à l'aide de ces deux fonctions, on pourra avoir les deux racines de l'équation les plus approchées d'un nombre donné a, l'une en plus et l'autre en moins.

Mais cette méthode a l'inconvénient d'exiger à chaque opération l'extraction d'une racine n[ième]. Voici deux formes plus commodes. Cherchons un nombre k tel, que la fonction

$$x + \frac{F x}{k x^n}$$

croisse avec x, quand $x > 1$. (Il suffit, en effet, de savoir trouver les racines d'une équation qui sont plus grandes que l'unité.)

Nous aurons pour la condition proposée

$$1 + \frac{d\frac{X-Y}{k x^n}}{dx} > 0 \quad \text{ou bien} \quad 1 - \frac{nX - xX'}{k x^{n+1}} + \frac{nY - xY'}{k x^{n+1}} > 0$$

or on a identiquement

$$nX - xX' > 0 \qquad nY - xY' > 0$$

il suffit donc de poser

$$\frac{nX - X'x}{k x^{n+1}} < 1 \qquad \text{pour } x > 1$$

et il suffit pour cela de prendre pour k la valeur de la fonction $nX - X'x$ relative à $x = 1$.

On trouvera de même un nombre h tel que la fonction

$$x - \frac{F x}{h x^n}$$

croîtra avec x quand x sera > 1, en changeant Y en X.

Ainsi l'équation donnée pourra se mettre sous l'une des formes

$$x = x + \frac{F x}{k x^n} \qquad x = x - \frac{F x}{h x^n}$$

qui sont toutes deux rationnelles, et donnent pour la résolution une méthode facile.

Qu'est-ce que résoudre numériquement une équation dans la période 1790-1850 ?

Qui résout numériquement des équations ?

Quelle est la place de Galois dans ce réseau de connaissances et de pratiques ?

La note de Galois a-t-elle été lue ?

Lacroix
Éléments d'algèbre à l'usage de l'École centrale des Quatre-Nations,
1799 - 1825 (14^{e} éd.)
Compléments des éléments d'algèbre à l'usage de l'École centrale des Quatre-Nations, 1801 - 1825 (5^{e} éd.)

Legendre
Méthodes nouvelles pour la résolution approchée des équations numériques
in *Supplément à l'Essai sur la théorie des nombres, seconde édition*, 1816 - 1830

Cauchy
Note III. Sur la résolution numérique des équations
in *Cours d'analyse de l'École royale polytechnique. 1re partie. Analyse algébrique*, 1821

Lagrange
Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés
1798 - 1808 - 1826

Fourier

Analyse des équations déterminées, première partie, 1831

Sturm

Mémoire sur la résolution des équations numériques

Mémoires présentés par divers savants étrangers à l'Académie royale des sciences, section sciences mathématiques et physiques, 4 (1835), 273-318

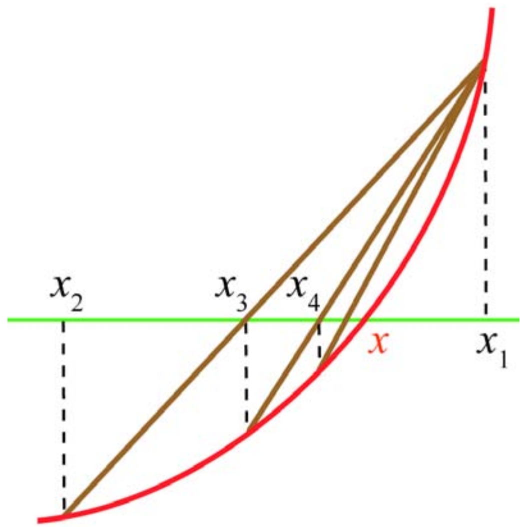
Localisation et séparation des racines

- Détermination d'un majorant et d'un minorant de l'ensemble des racines réelles
- Détection des racines multiples
- Comptage des racines (positives, négatives, imaginaires) sur un intervalle donné
- Détermination d'un intervalle séparant chaque racine des autres

Calcul numérique des racines avec une précision arbitraire

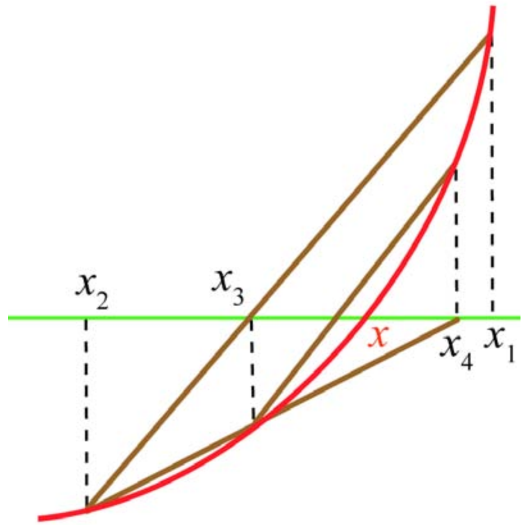
- Méthodes itératives issues des méthodes de fausse position
- Développement des racines en séries ou en fractions continues dans l'esprit de l'analyse algébrique du 18^{e} siècle

méthode
d'interpolation linéaire
(ordre 1)



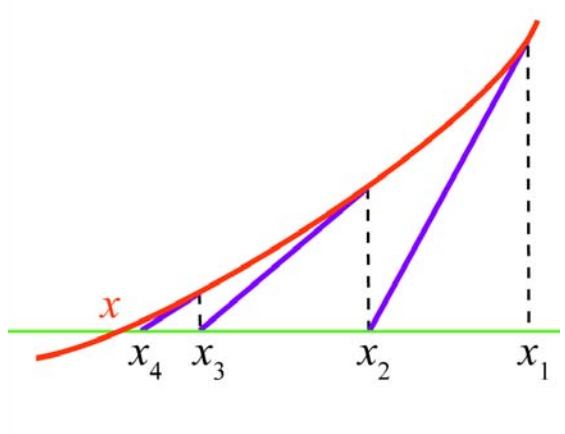
$$\begin{cases} x_1, x_2 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{\dfrac{f(x_n) - f(x_1)}{x_n - x_1}} \end{cases}$$

méthode
de la sécante
(ordre (1+√5)/2)



$$\begin{cases} x_1, x_2 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{\dfrac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}} \end{cases}$$

méthode
de Newton-Raphson
(ordre 2)



$$\begin{cases} x_1 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$

Le *Traité* de Lagrange : un gigantesque algorithme, complètement établi du point de vue théorique, pour détecter toutes les racines d'une équation polynomiale et calculer numériquement chacune d'elles à l'aide d'un procédé toujours convergent.

1. Trouver un minorant $\Delta > 0$ des valeurs absolues des différences entre les racines réelles distinctes. Pour cela, on calcule une équation auxiliaire dont les racines sont les différences entre toutes les paires ordonnées de racines distinctes.
2. Au moyen de Δ et en transformant éventuellement l'équation par un changement d'échelle, on détermine un ensemble d'entiers p tel que chaque intervalle $[p, p + 1]$ contienne une unique racine réelle et que chaque racine réelle soit contenue dans un de ces intervalles.
3. Sur chaque intervalle $[p, p + 1]$, on utilise un développement en fraction continue qui converge toujours vers la racine et fournit une estimation de l'erreur, contrairement à ce qui se passe dans certains cas avec la méthode de Newton.

« Lagrange et Waring ont proposé de rechercher la plus petite différence des racines de l’équation, ou une quantité moindre que cette plus petite différence. Considérée sous le rapport théorique, la solution est exacte […]

Mais il est facile de juger qu’on ne peut admettre cette méthode de résolution. En effet 1° le calcul qui ferait connaître cette valeur de la limite Δ est impraticable pour les équations d’un degré un peu élevé […] »

Fourier
1831

Théorème de Fourier-Budan

Considérons un polynôme P de degré n, et soit $N(x)$ le nombre de changements de signes dans la suite

$$P(x),\ P'(x),\ \ldots,\ P^{(n)}(x).$$

Le nombre de racines de P (en tenant compte des multiplicités) entre a et b, où $P(a) \neq 0$, $P(b) \neq 0$ et $a < b$, est inférieur ou égal à $N(a) - N(b)$, et peut différer de $N(a) - N(b)$ seulement d'un nombre pair.

« [La méthode de Lagrange], considérée sous un point de vue purement théorique, ne laisse rien à désirer du côté de la rigueur. Mais, dans l’application, la longueur des calculs nécessaires pour former l’équation aux carrés des différences, et la multitude des substitutions qu’on peut avoir à effectuer, la rendent presque impraticable […] »

Sturm
1835

Théorème de Sturm

Considérons un polynôme P. Calculons le PGCD de P et de P1 = P' :

$$P = Q_1P_1 - P_2$$
$$P_1 = Q_2P_2 - P_3$$
$$\ldots$$
$$P_{n-2} = Q_{n-1}P_{n-1} - P_n$$
$$P_{n-1} = Q_n\,P_n.$$

Soit N(x) le nombre de changements de signes dans la suite

$$P(x),\ P_1(x),\ \ldots,\ P_n(x).$$

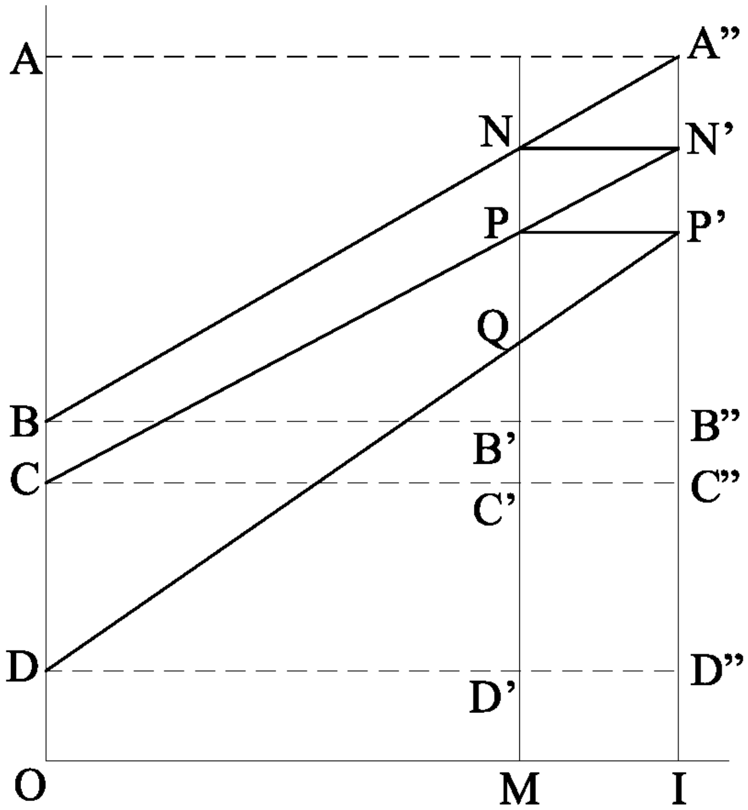
Le nombre de racines de P (sans tenir compte des multiplicités) entre a et b, où $P(a) \neq 0$, $P(b) \neq 0$ et $a < b$, est égal à $N(a) - N(b)$.

Léon-Louis Lalanne

« Les applications ont été, jusqu’à ce jour, la pierre d’achoppement de tous les procédés imaginés pour la résolution des équations numériques, non pas que, ni la rigueur, ni la beauté des considérations sur lesquels ils se fondent, en aient reçu la moindre atteinte ; mais enfin il faut bien reconnaître que, sans cesser de mériter l’admiration des géomètres, les découvertes de Lagrange, de Cauchy, de Fourier, de Sturm, d’Hermite, etc., n’ont pas fourni toujours des moyens facilement praticables pour la détermination des racines. »

Leçons de Lagrange à l'École normale de l'an III

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$



$$\mathrm{OD} = d$$

$$\mathrm{DC} = c \qquad \mathrm{OI} = 1$$

$$\mathrm{CB} = b \qquad \mathrm{OM} = x$$

$$\mathrm{BA} = a$$

$$\mathrm{B'N} = \mathrm{B''A''}.x = ax$$

$$\mathrm{C'N} = \mathrm{C'B'} + \mathrm{B'N} = ax + b$$

$$\mathrm{C'P} = \mathrm{C''N'}.x = \mathrm{C'N}.x = (ax+b)x$$

$$\mathrm{D'P} = \mathrm{D'C'} + \mathrm{C'P} = (ax+b)x + c$$

$$\mathrm{D'Q} = \mathrm{D''P'}.x = \mathrm{D'P}.x = ((ax+b)x+c)x$$

$$\mathrm{MQ} = \mathrm{MD'} + \mathrm{D'Q} = ((ax+b)x+c)x + d$$

Joseph-Balthazar Bérard

1810

OPUSCULES

MATHÉMATIQUES,

Contenant plusieurs Méthodes nouvelles de construire l'Equation aux Sections Coniques ; la Découverte d'une Propriété nouvelle de la Lumière ; une Balance algébrique propre à trouver les racines des Equations numériques de tous les degrés ; enfin plusieurs Problèmes nouveaux ou résolus par des méthodes nouvelles ;

Ouvrage principalement utile aux Jeunes-Gens qui se destinent à l'École Polytechnique ;

PAR J. B. BERARD,

Juge au Tribunal de Briançon ; Principal et Professeur de Mathématiques au Collége de la même ville ; Membre de la Société d'Agriculture du département de la Seine, des Sociétés littéraires de Grenoble, Gap, Carpentras et Avignon.

PARIS,

Chez F. LOUIS, Libraire, rue de Savoie, n° 6.

1810.

« [...] on savait qu'on trouve les racines des équations du quatrième degré, par l'intersection d'une parabole et d'un cercle ; mais j'ai remarqué que cette parabole peut être invariable et servir pour tous les cas ; ensorte qu'en la construisant en cuivre ou en carton, on peut très-simplement et très-brièvement trouver les racines. »

Rapport de Poisson sur Dubourguet, 1813

« […] il remplace chaque équation […] par deux autres équations à deux variables qu’il construit au moyen de courbes et, en discutant le cours de ces lignes dans chaque cas, il détermine le nombre de leurs intersections et par conséquent des racines réelles de la proposée. »

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE

DE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

A DEUX ET A TROIS DIMENSIONS,

CONTENANT

TOUTES LES THÉORIES GÉNÉRALES DE GÉOMÉTRIE ACCESSIBLES A L'ANALYSE ORDINAIRE.

PAR M. AUGUSTE COMTE,

ancien élève de l'École polytechnique, répétiteur d'analyse transcendante et de mécanique rationnelle a cette École, et examinateur des candidats qui s'y destinent,

auteur du *Système de Philosophie positive.*

PARIS.

CARILIAN-GOEURY ET Vve DALMONT, ÉDITEURS,

LIBRAIRES DES CORPS ROYAUX DES PONTS ET CHAUSSÉES ET DES MINES,

Quai des Augustins, nos 39 et 41.

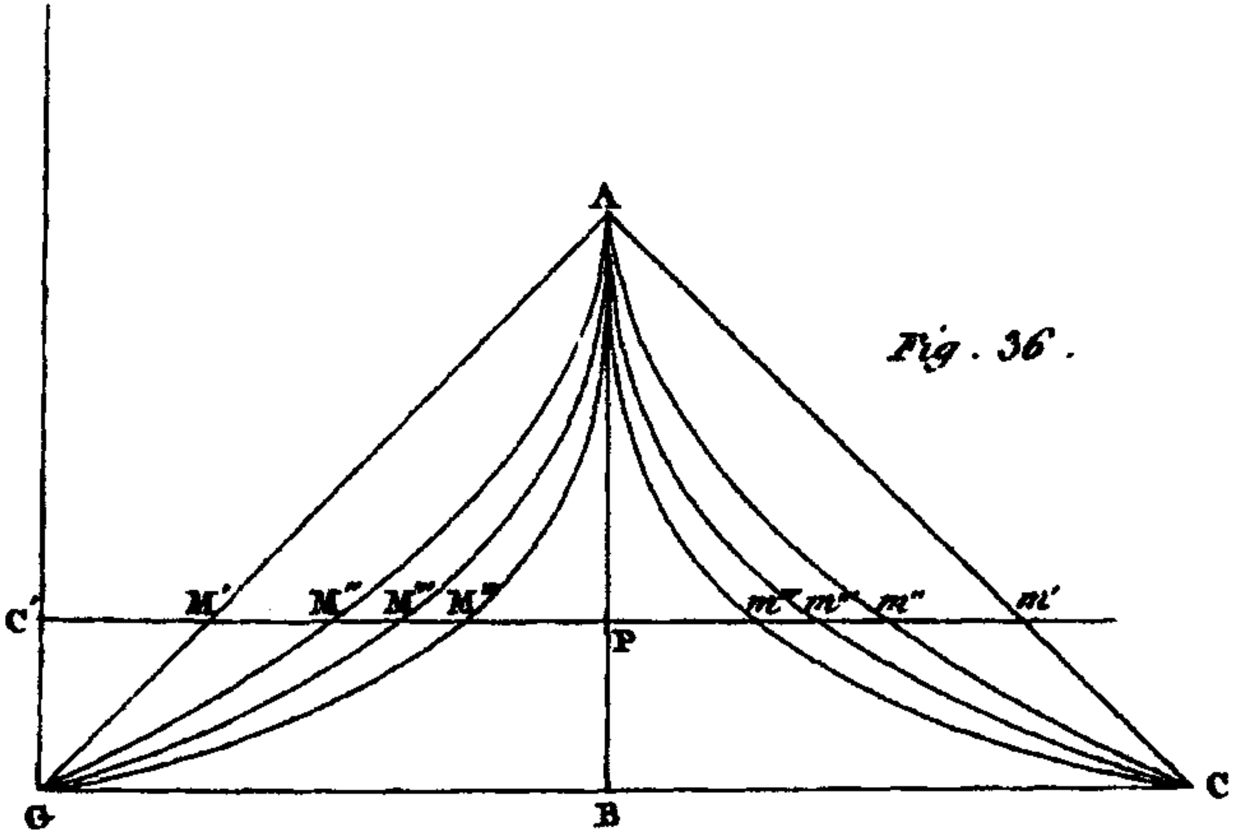
MARS 1843.

« Il s'agit maintenant d'une transformation […] où la figure doit suppléer à l'ensemble total de l'élaboration abstraite, soit numérique, soit surtout analytique, d'une équation qu'on ne saurait résoudre […]. Cette utile conversion, si souvent destinée à compenser, quoique incomplètement, l'extrême imperfection nécessaire de la résolution des équations, consiste à concevoir ces racines comme les abscisses propres aux intersections de deux lignes convenablement choisies […] »

Bérard

1810

$$2 + 3x + 8x^3 + 9x^4 = 4x^2 + 5x^5$$



$AP = x$

$PC' = 1$

$PM' = Pm' = x$

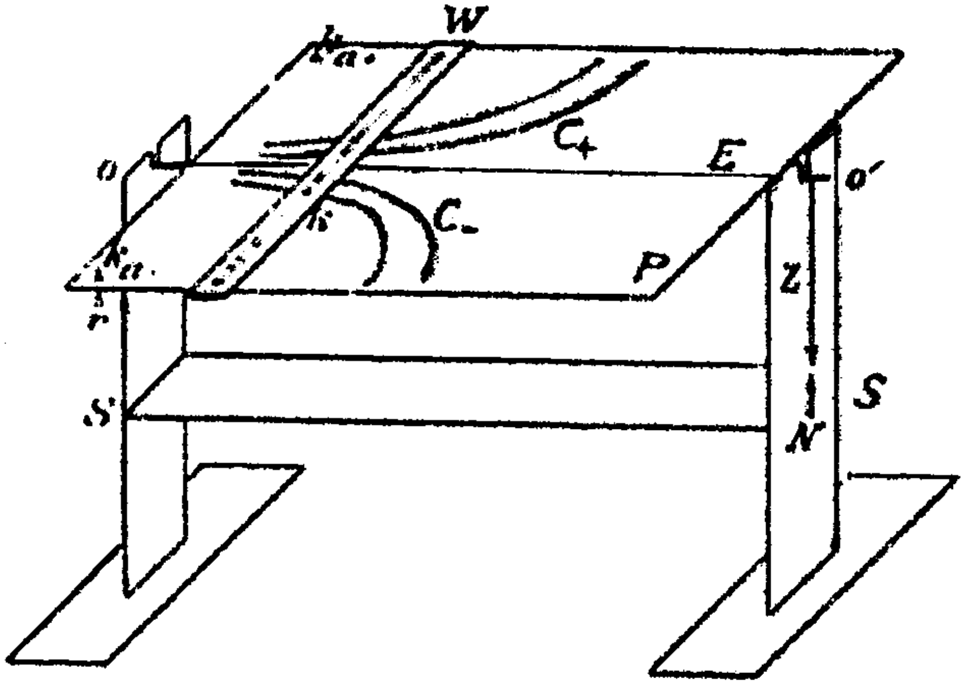
$PM'' = Pm'' = x^2$

$PM''' = Pm''' = x^3$

etc.

Lalanne

1840



Gaspard Monge
1815

$$x^3 - px - q = 0$$

$$\Leftrightarrow \ \exists y \ \begin{cases} y = x^3 \\ y = px + q \end{cases}$$

CORRESPONDANCE

SUR

L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE,

A L'USAGE

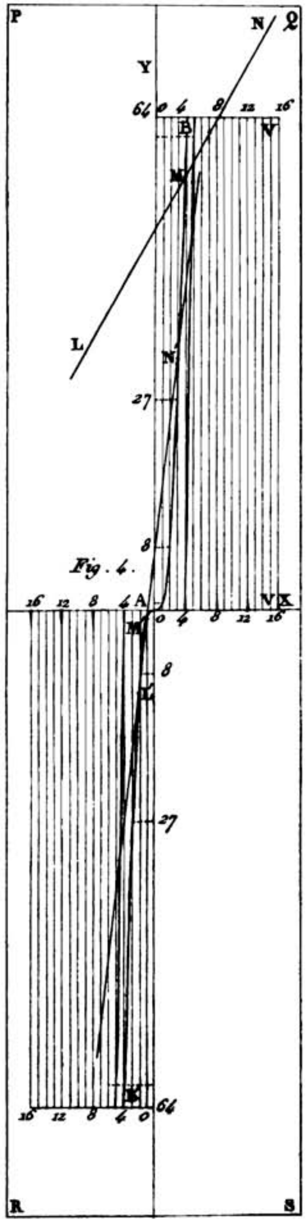
DES ÉLÈVES DE CETTE ÉCOLE;

PAR M. HACHETTE.

Janvier 1814 — Janvier 1816.

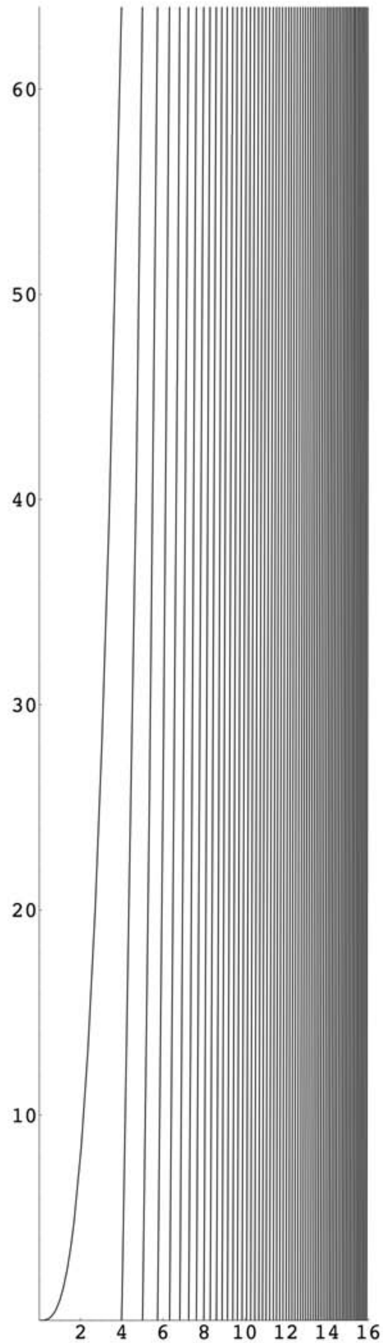
TOME TROISIÈME.

PARIS,
Chez Mme Ve COURCIER, Impr.-Lib. pour les Mathématiques et la Marine, quai des Augustins, n° 57.
1816.



« La planche de ce dessin (*) a été gravée, avec le plus grand soin, par les artistes de la commission d'Égypte ; les parallèles ont été tracées avec la machine *conté*, et la courbe a été dessinée par M. Girard. La distance des abscisses positive et négative, qui correspondent aux points extrêmes de cette courbe, mesurée sur l'axe des *y*, est réellement de 81,92 mètres ; cette distance est ramenée sur la planche gravée, à une dimension 64 fois plus petite, 1,28 mètre. »

(*) Ce dessin gravé, se vend à part, chez M^me^. V^e^. Courcier, quai des Grands-Augustins, n° 57.

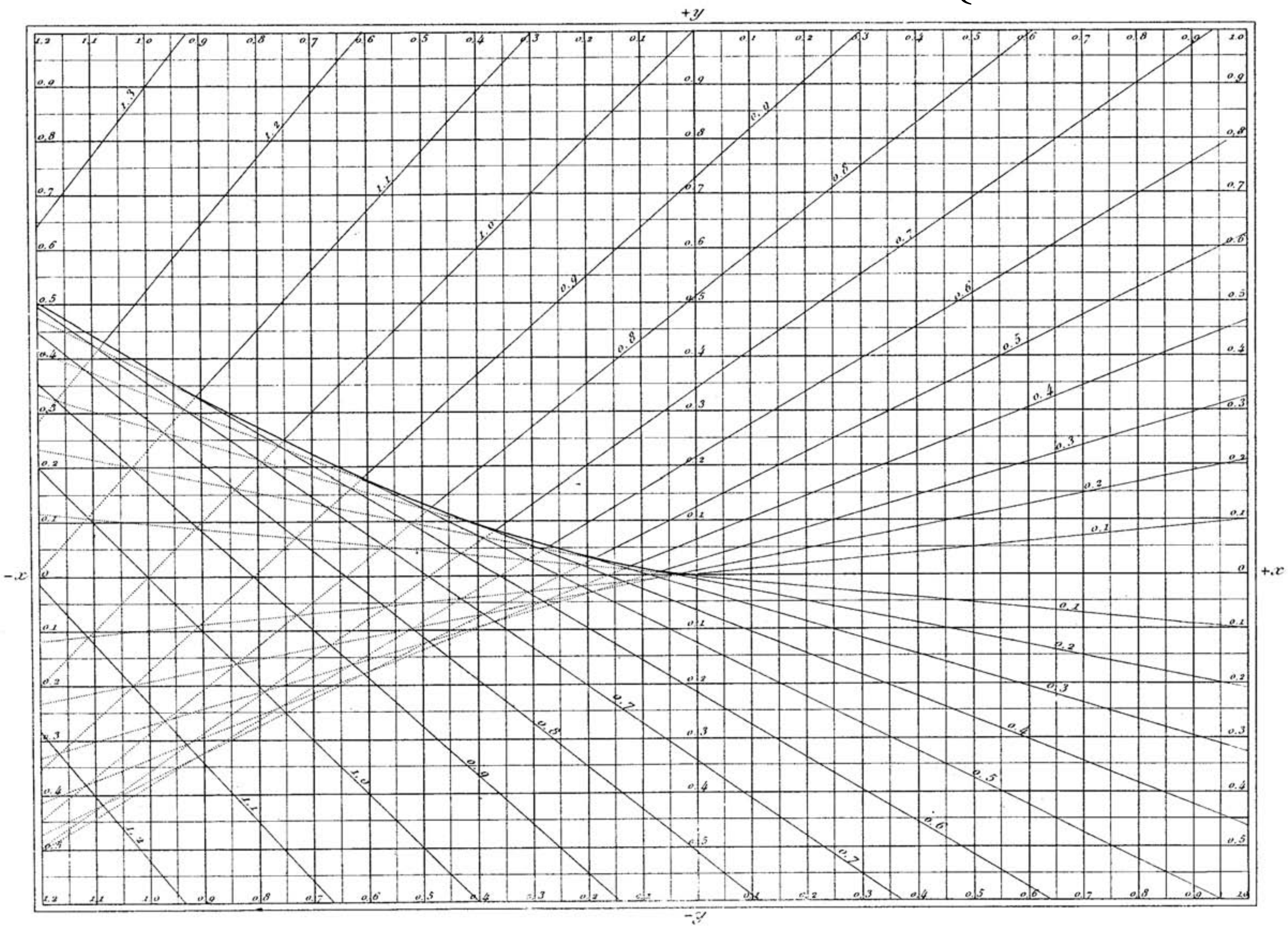


$$x^3$$
$$x^3 - 64$$
$$x^3 - 2 \times 64$$
$$x^3 - 3 \times 64$$
$$\cdots$$
$$x^3 - 63 \times 64$$
$$x^3 - 64 \times 64$$

Lalanne

1843

$$z^3 + pz + q = 0 \iff \exists(x,y)\ \begin{cases} x = p \\ y = q \\ zx + y + z^3 = 0 \end{cases}$$



Legendre propose un nouvel algorithme général pour remplacer avantageusement celui de Lagrange :

Soit à résoudre l'équation $f(x) = 0$, où f est un polynôme de degré n.

1) On se ramène au cas où il n'y a que des racines simples et à la recherche des racines positives.

2) On détermine un majorant a des racines positives.

3) On met l'équation sous la forme $x^n = \varphi(x)$, avec φ croissante (« omale »).

Legendre
1816

$$x^5 - 2x^4 + 4x^3 + x^2 - 5x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^5 + 4x^3 + x^2 = 2x^4 + 5x + 3$$

$$\Leftrightarrow \quad x^5\left(1 + \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = 2x^4 + 5x + 3$$

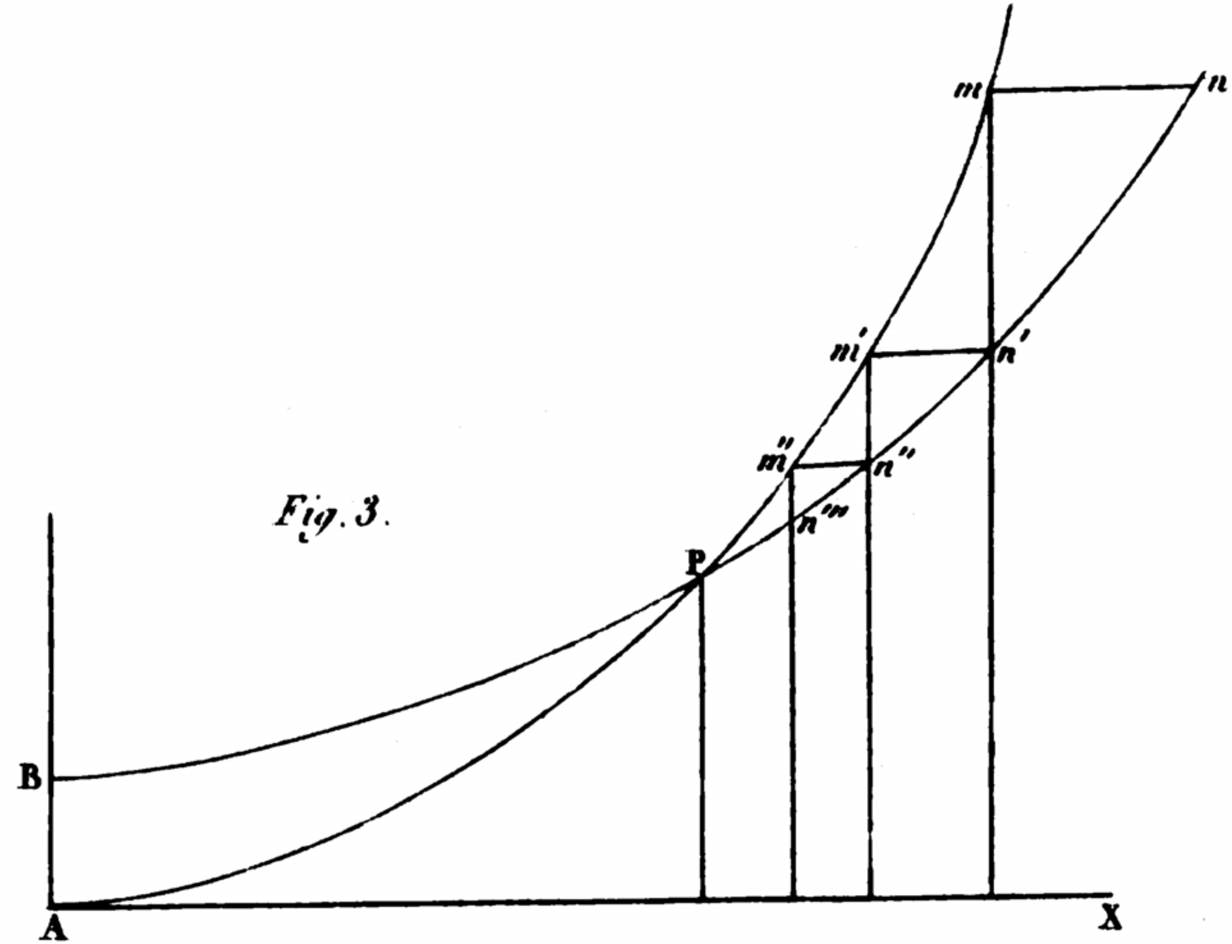
$$\Leftrightarrow \quad x^5 = \frac{2x^4 + 5x + 3}{1 + \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^3}}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \sqrt[5]{\frac{2x^4 + 5x + 3}{1 + \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^3}}}$$

4) On construit la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{p+1} = \sqrt[n]{\varphi(u_p)} \end{cases}$$

Elle converge vers la plus grande racine *r* de l'équation.



5) On divise $f(x)$ par $x - r$ et on recommence pour trouver la racine suivante, etc.

Cauchy
1821

« Mais on peut arriver à ce but en suivant une autre méthode dont M. *Legendre* a fait usage dans le *Supplément à la Théorie des nombres*. »

Si $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$, avec φ et ψ continues et croissantes sur $[x_0, X]$, et si $f(X) > 0$, alors la suite X, X', X'', X'''… définie par $\varphi(X') = \psi(X)$, $\varphi(X'') = \psi(X')$, $\varphi(X''') = \psi(X'')$ … est décroissante et, soit converge vers la plus grande racine réelle de l'équation $f(x) = 0$ comprise entre x_0 et X, soit devient plus petite que x_0.

$$\begin{cases} u_0 = X \\ u_{p+1} = \varphi^{-1}(\psi(u_p)) \end{cases}$$

Galois, 1830

M. Legendre a le premier remarqué que, lorsqu'une équation algébrique était mise sous la forme

$$\varphi x = x,$$

où φx est une fonction de x qui croît constamment en même temps que x, il était facile de trouver la racine de cette équation immédiatement plus petite qu'un nombre donné a, si $\varphi a < a$, et la racine immédiatement plus grande que a, si $\varphi a > a$.

Pour le démontrer, on construit la courbe $y = \varphi x$ et la droite $y = x$. Soit prise une abscisse $= a$, et supposons, pour fixer les idées, $\varphi a > a$, je dis qu'il sera aisé d'obtenir la racine immédiatement supérieure à a. En effet, les racines de l'équation $\varphi x = x$ ne sont que les abscisses des points d'intersection de la droite et de la courbe, et il est clair que l'on s'approchera du point le plus voisin d'intersection, en substituant à l'abscisse a l'abscisse φa. On aura une valeur plus approchée encore en prenant $\varphi\varphi a$, puis $\varphi\varphi\varphi a$, et ainsi de suite.

John E. Littlewood
A Mathematician's
Miscellany
1953

"Probably, the best of pictorial arguments is a proof of the 'fixed point' theorem in 1 dimension (…) For the professional the only proof needed is Fig. 9."

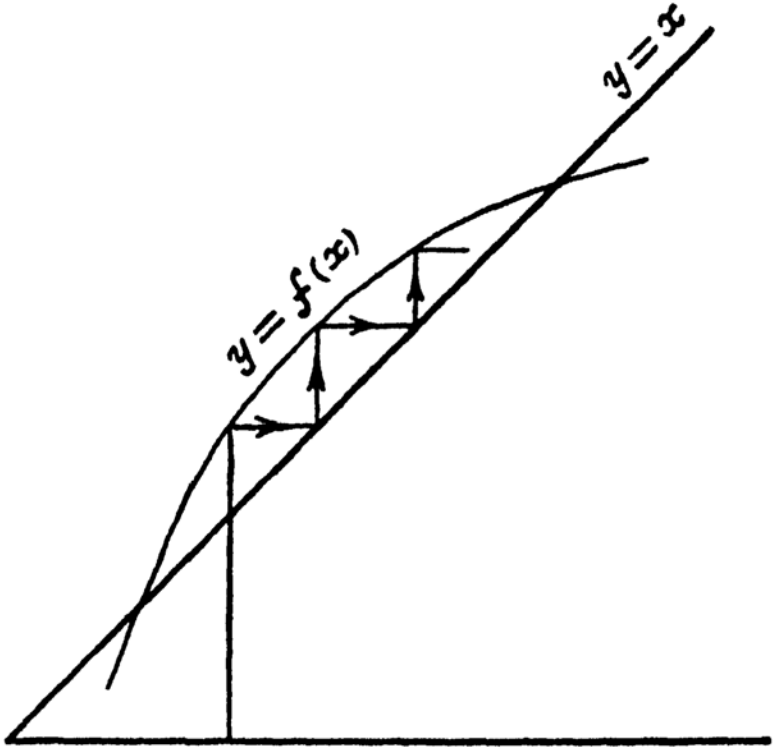


FIG. 9

Pour résoudre une équation Fx = 0 de degré n, il suffit de savoir trouver ses racines plus grandes que 1.

Galois met l'équation sous la forme

$$x = x + \frac{\mathrm{F}x}{kx^n}$$

et détermine un nombre k tel que le second membre soit croissant pour $x > 1$.

On a ainsi une forme rationnelle évitant les extractions de racines n-ièmes de Legendre.

THÉORIE
ANALYTIQUE
DE LA CHALEUR,

PAR M. FOURIER.

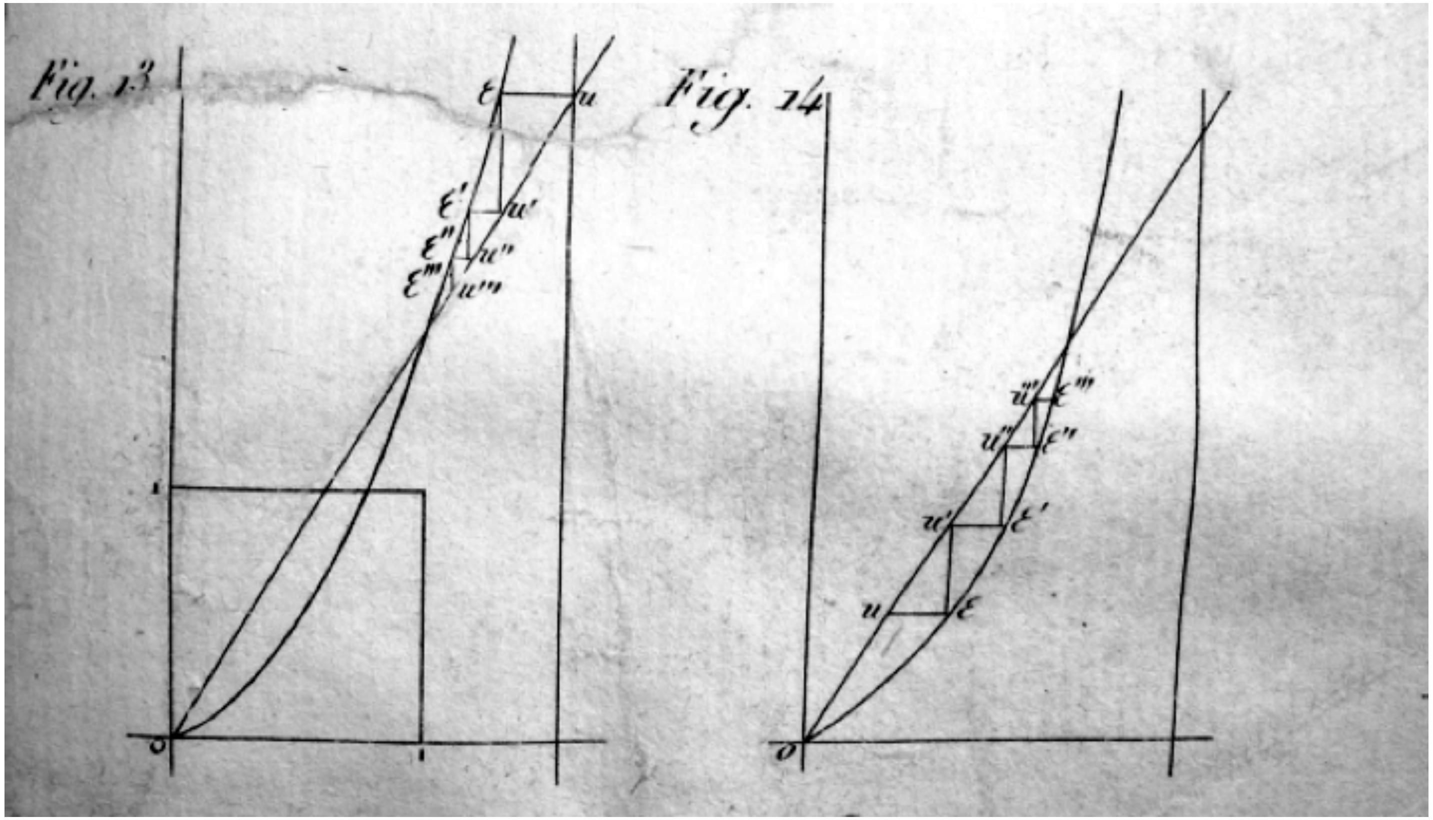
A PARIS,

CHEZ FIRMIN DIDOT, PÈRE ET FILS,

LIBRAIRES POUR LES MATHÉMATIQUES, L'ARCHITECTURE HYDRAULIQUE
ET LA MARINE, RUE JACOB, N° 24.

1822.

Fourier
1822



$$\begin{cases} u = \tan\varepsilon \\ u = \dfrac{\varepsilon}{\lambda} \end{cases} \qquad \begin{cases} \varepsilon = \tan^{-1} u \\ \varepsilon = \lambda u \end{cases}$$

$$\varepsilon = \lambda \tan\varepsilon \qquad \varepsilon = \tan^{-1}\frac{\varepsilon}{\lambda}$$

Fourier, 1831

« Les constructions rendent ces conséquences très-sensibles. »

« Les constructions qui répondent à ce genre d'approximation sont remarquables. Par exemple elles consistent ici dans une spirale rectangulaire, dont le point extrême s'approche continuellement du point d'intersection correspondant à la valeur de la racine. »

« Cet emploi des fonctions continues doit être dirigé par les propriétés de la figure. On pourrait y suppléer par des considérations purement analytiques, mais en omettant l'examen de la figure on ajouterait beaucoup à la difficulté de la recherche, qui au contraire devient très-simple au moyen de la construction. »

Ernest-Maurice Lémeray 1894-1899

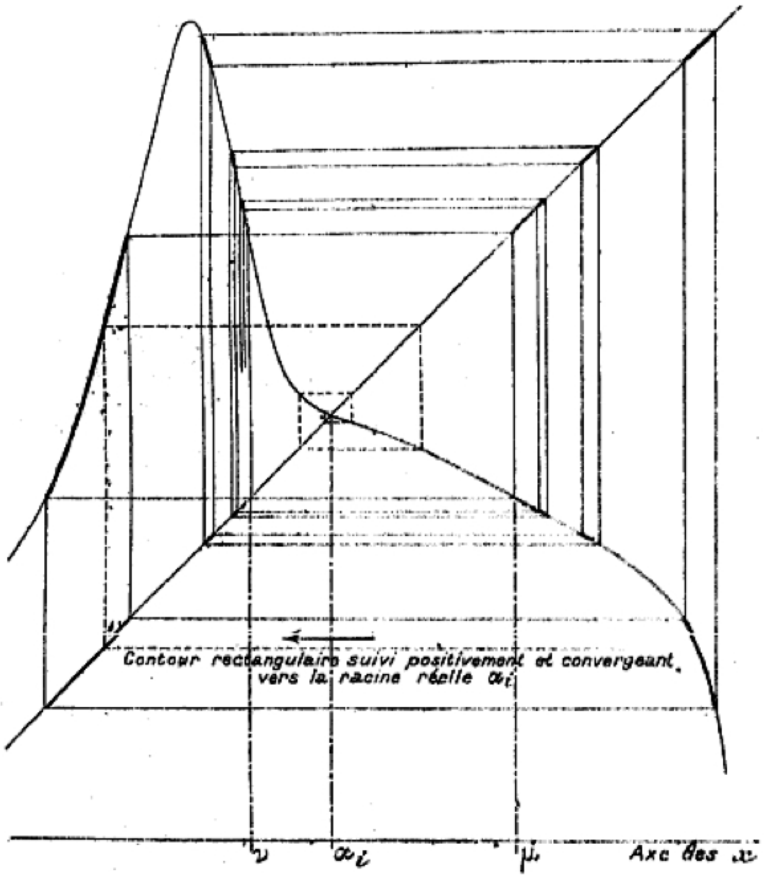


Fig. 2.

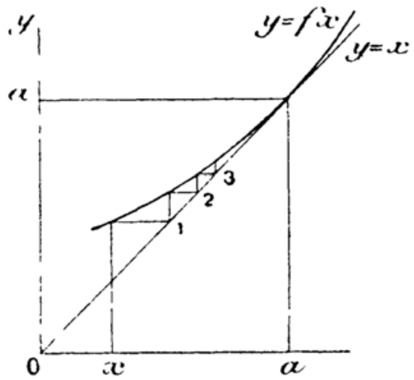


Fig. 3.

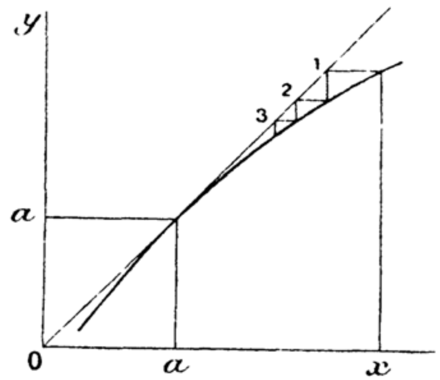


Fig. 4.

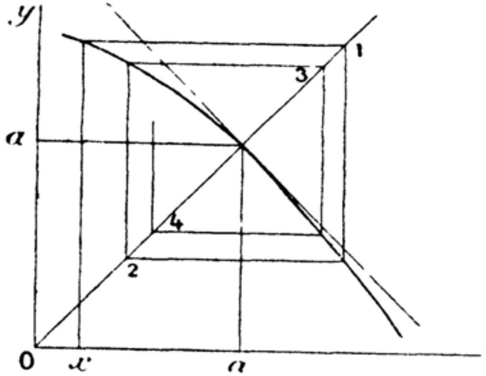
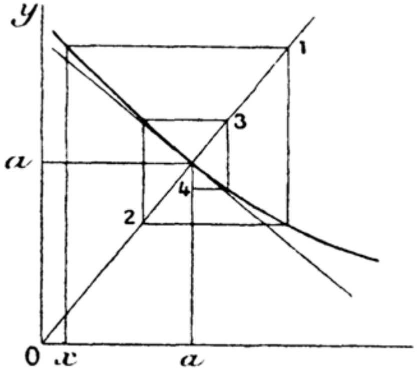


Fig. 5.

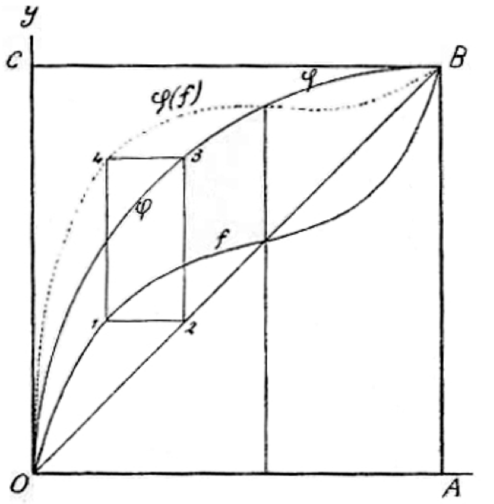


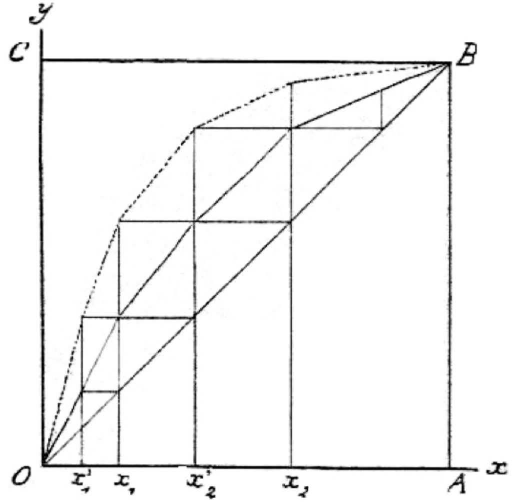
Ernest-Maurice Lémeray, Sur le calcul des racines des équations par approximations successives, *Nouvelles annales de mathématiques (3)*, 17 (1898), 534-539

« Cette méthode employée dans certains cas par Euler, Legendre, Galois, est sans doute beaucoup plus ancienne (…)

Galois a donné pour résoudre les équations algébriques une méthode d'approximations successives par les substitutions uniformes ([2]), dans laquelle on n'a jamais à faire que des opérations *rationnelles* ; en ce qui concerne les équations quelconques, on peut, dans le même ordre d'idées (…) »

([2]) Galois, *Œuvres mathématiques*.





Salvatore Pincherle

Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées
Équations et opérations fonctionnelles, 1912
33. Le calcul d'itération - 34. Itérations particulières

Newton – Cauchy – **Galois** – Hill – Sancery –
Schröder – Hoffmann – Farkas – Koenigs –
Netto – Isenkrahe – Podetti